Ders 6

Metindeki ilgili bölümler §1.4

Sıradeğişmeli gözlenebilirlerin tam kümesi

Sadece çok basit fiziksel sistemlerde tek bir gözlenebilirin ölçümü sistemin durum vektörünü belirlemek için yeterli olur. Şüphesiz, spin 1/2 sistemi bu özelliğe sahiptir : spinin herhangi bir bileşenini ölçerseniz durum vektörü (en fazla ilgisiz bir faz çarpanı kadar fark edecek şekilde*) sabitlenir. Daha karmaşık sistemler, durumun karakterize edilmesi için daha fazla gözlenebilire ihtiyaç duyar. Örneğin, hidrojen atomunun enerji düzeylerinin, enerji, orbital açısal momentum büyüklüğü, açısal momentumun bir bileşeni ve elektron spin durumu ile tek tek belirlenebileceğini hatırlayın. Başka seçenekler olasıdır. Bir gözlenebiliri ölçtükten ve belirli bir sonucu - bir özdeğeri - elde ettikten sonra sistemin durumu karşılık gelen özvektördür. Birden fazla durum vektörü bu ölçüm sonucuna karşılık gelebilir. Matematiksel olarak, bu özdeğer dejeneredir. Durumu benzersizce saptamak için diğer gözlenebilirler ölçülmelidir. Açıkça, eğer bir takım gözlenebilirlerin ölçümü, durumu (vektörü - en fazla bir faz çarpanı farkıyla) belirliyorsa, bu durum söz konusu gözlenebilirlerin hepsinin aynı anda özvektörü olmalıdır. Eğer bu bir takım gözlenebilire ait ölçümlerin olası sonuçlarının Hilbert uzayının bazını tanımlamasını istersek, bu gözlenebilirler uyuşumlu olmalıdır, yani bunları temsil eden işlemcilerin hepsi sıradeğişmeli olmalıdır. Bu şekildeki değişkenlerin kümesi *sıradeğişmeli gözlenebilirlerin tam kümesi* (SGTK) olarak anılır. Coulomb potansiyelindeki bir elektron olarak modellenen, hidrojen atomu için enerji, orbital açısal momentumun büyüklüğü, orbital açısal momentumun bir bileşeni ve elektron spininin bir bileşeni ile SGTK'yı oluşturur. Tek bir spin 1/2 sistemi için spinin herhangi bir bileşeni SGTK'yı tanımlar. Belli ki, SGTK tek bir tane değildir.

$A, B, \ldots$ ile bir SGTK verildiğinde bunun belirlediği ON bazın elemanlarını SGTK'nin özdeğerleri ile $|a, b, \ldots\rangle$ şeklinde etiketleyebiliriz. Bunlar SGTK'nin, kesinlikle $a, b, \ldots$ değerlerine sahip olduğu bilinen, elemanlarının durumlarıdır. Vektörler

$$\langle a, b, \ldots | a', b', \ldots\rangle = \delta_{aa'}\delta_{bb'}\ldots$$

ifadesini sağlar.

Uyuşumsuz gözlenebilirler. Belirsizlik ilkesi.

Uyuşumsuz gözlenebilirler sıradeğişmeli olmayan işlemcilerle temsil edilir. Gördüğümüz gibi, uyuşumsuz gözlenebilirler için her iki gözlenebilirin kesinlik derecesinde belirlenemediği durumlar

*Bir (e^{ia}) faz çarpanı ile birbirinden farklı olan iki durum tüm gözlenebilirlere aynı beklenen değeri verirler – alıştırma. Bu, bütün olasılık dağılımlarının, ve dolayısıyla tüm fiziksel öngörülerin de, faz çarpanlarına duyarsız olduğu anlamına gelir.

vardır. Şimdi bunu daha açık yapacağız ve ünlü belirsizlik ilkesinin - herhalde belirsizlik *teoremi* olarak anılması daha iyi – çok genel bir biçimini vereceğiz.

Verilen bir A gözlenebiliri ve bir $|\psi\rangle$ durumu ile *A'nın* $|\psi\rangle$ *durumundaki dağılmasını*

$$\langle(\Delta A)^2\rangle := \langle(A - \langle A\rangle)^2\rangle = \langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2.$$

olarak tanımlarız. Dağılma (varyans olarak da adlandırılır), A gözlenebilirinin $|\psi\rangle$ durumundaki istatistiksel belirsizliğini niteleyen negatif olmayan gerçel bir sayıdır. Dağılmanın gerçekten negatif olmadığını görmek için, herhangi bir Hermitesel C işlemcisinin karesinin beklenen değerinin pozitif bir sayı olduğunu not edin :

$$\langle\psi|C^2|\psi\rangle = \langle\psi|C^\dagger C|\psi\rangle\,;$$

sağ taraf yalnızca $C|\psi\rangle$ vektörünün uzunluğunun karesidir ki bu da negatif-olmayan olmalıdır. $C = A - \langle A\rangle I$ şeklinde düzenleyerek ve $\langle A\rangle$'nin gerçel sayı (alıştırma) olması gerektiğine dikkat ederek $\langle(\Delta A)^2\rangle \geq 0$ sonucuna varırız.

Dağılmanın, ancak ve ancak $|\psi\rangle$ durumunun A'nın özvektörü olduğunda sıfır olacağını not edin. "Ancak" kısmını siz kolayca doğrulayabilirsiniz. "Ancak ve ancak" kısmını göstereyim. Şöyle yazın

$$\begin{aligned}\langle(\Delta A)^2\rangle &= \langle\psi|(A - \langle A\rangle I)^2|\psi\rangle \\ &= \langle|(A - \langle A\rangle I)^\dagger(A - \langle A\rangle I)|\psi\rangle \\ &= \|(A - \langle A\rangle I)|\psi\rangle\|^2.\end{aligned}$$

Bir vektörün normu ancak ve ancak vektör sıfır vektörü ise yok olur. Dolayısıyla, eğer dağılma sıfır oluyorsa

$$(A - \langle A\rangle I)|\psi\rangle = 0\,,$$

elde ederiz ki bu özvektör şartıdır (alıştırma).

Schwarz eşitsizliğini kullanarak iki gözlenebilirin dağılmaları arasında aşağıdaki bağıntı kurulabilir (ispat için kitabınıza bakın) :

$$\langle\Delta A^2\rangle\langle\Delta B^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$$

Bu, *belirsizlik bağıntısının* genel formudur. *Verilen bir durumda*, bir çift gözlenebilirin istatistiksel belirsizliklerinin çarpımını, bu gözlenebilirlerin sıradeğişiminin beklenen değerine bağıntılar. Eğer verilen bu durumda sıradeğişimi veya beklenen değeri sıfır olursa belirsizlik bağıntısının içeriği olmaz. Aksi taktirde, gözlenebilirlerin uyuşumsuzluğunun etkisi hakkında bilgi verir. Genel olarak, bu "etki" seçilen duruma bağlıdır. Bunu, yukarıdaki eşitsizlikteki beklenen değerlerin verilen durumla tanımlandığı gerçeğinden görebilirsiniz. Bu, akılda tutmak için önemlidir. Belli hallerde (örneğin daha sonra çalışılacak olan konum-momentum bağıntısı) belirsizlik bağıntısı durumdan bağımsız çıkar ki böylece daha dramatik - ve daha ünlü - olur.

Spin 1/2 sistemi için çeşitli gözlenebilirlerin belirsizlik bağıntıları doğrudan hesaplanabilir. Bunu yapmak için, aşağıdaki (ödevinizde türettiğiniz) sıradeğişim bağıntılarına ihtiyacınız var :

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \qquad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \qquad [S_z, S_x] = i\hbar S_y.$$

$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$ olsun (bu genel bir durum vektörüdür). S_x ve S_z için belirsizlik bağıntısını düşünüyoruz. Elimizde

$$\langle \Delta S_z \rangle^2 \langle \Delta S_x \rangle^2 \geq \hbar^4 [\mathrm{Im}(ab^*)]^2.$$

var (alıştırma).

Kuşkusuz, a veya b yok olursa, durum, S_z'nin bir durumudur ve belirsizlik bağıntısının bir anlamı yoktur. Aksi halde, belirsizliklerin çarpımının alt sınırının durumun seçimi ile nasıl değişeceğini görebilirsiniz. Örneğin, eğer $a = 1/\sqrt{2}$ ve $b = i\sqrt{2}$ (yani durum S_y'nin bir özdurumu) ise

$$\langle \Delta S_z \rangle^2 \langle \Delta S_x \rangle^2 \geq \frac{\hbar^4}{4}.$$

elde ederiz.