Ders 5

Metindeki ilgili bölümler §1.2-1.4

Alternatif bir üçüncü postüla

Burada üçüncü postülaya eşdeğer bir ifade var.*

Alternatif Üçüncü Postüla

A, ON $|i\rangle$ özvektör bazlı, Hermitesel bir işlemci olsun :

$$A|i\rangle = a_i|i\rangle$$

A ile temsil edilen gözlenebilirin tek olası ölçüm sonucu a_j özdeğerlerinden biridir. $|\psi\rangle$ durumunda a_j elde etme olasılığı

$$Prob(A = a_j) = \sum_{i=1}^{D} |\langle i, a_j|\psi\rangle|^2 ,$$

olur. Burada toplam, verilen a_j özdeğeriyle $|i, a_j\rangle$, $i = 1, \ldots, D$ özvektörlerinin D-boyutlu uzayını kapsıyor. Eğer a_k özdeğeri dejenere değilse

$$Prob(A = a_j) = |\langle j|\psi\rangle|^2$$

olacağını not edin. Ayrıca, dikkat edin : $\langle j|\psi\rangle$, $|\psi\rangle$'ın $|j\rangle$ doğrultusundaki bileşenidir.

Dejenereliğin olmadığı durum için olasılık formülünü ispatlayalım. Dejereneliğe izin vermek bir problem değildir. Bir alıştırma olarak bunun hakkında düşünün. $f(x)$, a_j'nin karakteristik fonksiyonu olsun. Elimizde (alıştırma)

$$f(A) = |j\rangle\langle j|.$$

var. Sonra, $|\psi\rangle$ durumunda

$$Prob(A = a_j) = \langle f(A)\rangle = \langle\psi|(|j\rangle\langle j|)|\psi\rangle = |\langle j|\psi\rangle|^2$$

elde ederiz. Durum vektörleri birim norma sahip olduğundan

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \sum_j \langle\psi|j\rangle\langle j|\psi\rangle = \sum_j |\langle j|\psi\rangle|^2$$

buluruz ki bu, $Prob(A = a_j)$ olasılıklarının, tüm özdeğerler üzerine toplandığında bir etmesidir. Bu, A'nın özdeğerlerinden biri *olmayan* bir değerde bulunma olasılığının sıfır olduğunu belirtir.

*Şimdilik, sonlu boyutlu Hilbert uzaylarına uygulanabilen bir formda ifade ediyoruz. Sonsuz boyutlulara (bir "parçacık"la olduğu gibi) nasıl genelleştirileceğini az sonra göstereceğiz.

Bir gözlenebilirin beklenen değerini olasılıkların açıkça görüneceği şekilde yazabiliriz. Her zamanki gibi, elimizde

$$A|i\rangle = a_i|i\rangle, \qquad \langle i|j\rangle = \delta_{ij}$$

var. Eğer bir sistem $|\psi\rangle$ durumunda ise (özdeşlik işlemcisini iki defa araya ekleyerek - iyi alıştırma)

$$\begin{aligned} \langle A\rangle &= \langle\psi|A|\psi\rangle \\ &= \sum_{ij}\langle\psi|i\rangle\langle i|A|j\rangle\langle j|\psi\rangle \\ &= \sum_i a_i|\langle i|\psi|\rangle|^2. \end{aligned}$$

hesaplarız. Beklenen değerin, bütün olası sonuçların, olasılıkları ile ağırlıklı, toplamına eşit olduğunu görüyoruz – tam olması gerektiği gibi!

(Boylandırılmış) Özvektörler tarafından özel bir rol oynandığına dikkat edin : Eğer durum A gözlenebilirinin a özdeğerli bir özvektörü ise a elde etme olasılığı birdir. Özdurumlar, bir (veya daha fazla) gözlenebiliri kesinlik derecesinde bildiğiniz durumlardır.

İşte size iyi bir alıştırma : Her durum vektörünün bir Hermitesel işlemcinin özvektörü olduğunu gösterin. Bundan dolayı, en azından prensipte, her bir durum uygun bir ölçüm ile belirlenebilir.

Üçüncü postüla, verilen bir gözlenebilire ait ölçümün olası sonuçlarının hangileri olduğu hakkında çok özgün öngörüler yapar. Esas itibariyle, kuantum mekaniğinin tüm fiziksel çıktısı bu postüla yoluyla meydana gelir. Öngörülerin her zaman olasılıksal bir doğası olduğunu vurgulamalıyım. (Elbette, bazı olasılıklar 1 veya 0'dır. Dolayısıyla bu, kimsenin hiçbir zaman kesinlik içeren ifadeler ortaya koyamayacağı anlamına *gelmez.*)

Haydi, üçüncü postülanın bu yeni formunu, spin 1/2 sisteminden gelen bir kaç basit örneğe uygulayalım. Aşağıdaki durumu düşünün,

$$|\psi\rangle = |S_y,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i|-\rangle).$$

Diyelimki S_y'i $-\hbar/2$ değeriyle bulma olasılığı nedir?

$$|S_y,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - i|-\rangle)$$

olduğu için $|S_y,+\rangle$'ya ortogonaldir,

$$\langle S_y,-|S_y,+\rangle = 0,$$

ve bu olasılık sıfırdır. Aynı durumda, S_z'nin $\hbar/2$ değerinde bulunma olasılığı nedir?

$$|\langle S_z,+|S_y,+\rangle|^2 = |\frac{i}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$$

Elde ederiz. Ve bunlar gibi...

Tekrar Stern-Gerlach

Şimdi, bizim spin 1/2 sistemi modelimizden Stern-Gerlach deneyinin bazı çarpıcı özelliklerini *türetelim.* Bizim spin 1/2 sistemi ışın demetimizi, çok sayıdaki özdeş sistemler olarak görün. Işın demetini SG_z düzeneğinden geçirdiğimizde, ve spin yukarı demetini muhafaza ettiğimizde, hepsi $|S_z,+\rangle$ durumunda olan çok sayıdaki parçacığın bir koleksiyonunu elde ederiz. Eğer bu ışını başka bir SG_z düzeneğinden geçirirsek pzrçacıkların hepsinin hala spin yukarı olduğunu görürüz. Modelimizde, bu sonuç basitçe, "$|\psi\rangle = |S_z,+\rangle$ durumunda $S_z = \hbar/2$ bulma olasılığı birdir" ifadesidir :

$$|\langle S_z,+|\psi\rangle|^2 = |\langle S_z,+|S_z,+\rangle|^2 = 1$$

Şimdi filtrelenmiş bu ışın demetinin SG_x düzeneğinden geçirildiğini düşünün. Işının iki yarım parçaya ayrıldığını biliyoruz. Modelimizde, bu $|\psi\rangle = |S_z,+\rangle$ iken S_x'in olasılık dağılımını hesaplayarak görülür.

$$|\langle S_x,\pm|\psi\rangle|^2 = |\langle S_x,\pm|S_z,+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

elde ederiz. Şimdi modelimizin doğayı tarif etmek için kullanılmasının can alıcı bir yönüne geldik. $S_x = \hbar/2$'ye sahip olan bütün parçacıkları alıp SG_z düzeneğinden geçirdiğimizi varsayarsak modelimizin öngörüsü ne olur? Anahtar gözlem, SG_z,den geçirilecek ışın demetindeki parçacıkların hepsi *şimdi*

$$|\psi\rangle = |S_x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S_z,+\rangle + |S_z,-\rangle)$$

durumundadır. SG_x kullanımındaki ölçüm/hazırlık/filtreleme süreci sistem için yeni bir durum vektörü tayin etti! Bunu doğrulamak için, SG_x ile filtrelenmiş demeti sadece bir başka SG_x düzeneğinden geçirir ve parçacıkların $S_x = \hbar/2$'e sahip olma olasılığının bir olduğunu görürüz. Bu, tümünün karşılık gelen $|S_x,+\rangle$ özdurumunda olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, bu demeti SG_z'den geçirdiğimizde 50-50 olasılık dağılımı buluruz :

$$|\langle \pm|\psi\rangle|^2 = |\langle \pm|S_x,+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Şimdi bu tip bir sonucu genel manada anlamak için biraz zaman harcamak istiyoruz.

Uyuşumlu ve Uyuşumsuz Gözlenebilirler

Stern-Gerlach deneyinde bulunan sıradışı sonucu aşağıdaki gibi genelleyelim. A ve B gibi iki gözlenebilirimizin olduğunu varsayalım. Eğer A'yı ölçersek özdeğerlerinden birini, mesela a, elde ederiz. (Sadece) sadelik adına, bu özdeğerin değenere olmadığını kabul edelim. Sistemin durumu şimdi $|a\rangle$ özvektörüdür. Burada

$$A|a\rangle = a|a\rangle.$$

Eğer sonra B gözlenebilirini ölçersek bir özdeğerini, mesela b, buluruz ve sistem $|b\rangle$ durumundadır. Burada,

$$B|b\rangle = b|b\rangle$$

(sadelik adına, b'nin de dejenere olmayan bir özdeğer olduğunu kabul edelim). Şimdi, a elde etme olasılığı

$$|\langle a|\psi\rangle|^2 = |\langle a|b\rangle|^2$$

olur. Gerçel bir c sayısı, öyleki $|a\rangle = e^{ic}|b\rangle$, olmadıkça bu olasılık birden küçüktür.* Ne zaman $|a\rangle = e^{ic}|b\rangle$ elde ederiz? Bu şart A ve B'nin ortak özvektörleri olduğu anlamına gelir. (Spin işlemcilerinin ortak özvektörlerinin olmadığını not edin - alıştırma.) A ve B, özvektörlerinin tümünü müşterek paylaşmadıkça, gözlenebilirlerden birini kesinlikle bilmenin diğerini kesinlik derecesinde bilmeyi engelleyeceği haller olacaktır. Böyle gözlenebilirler *uyuşumsuz* olarak anılır. Hangi şartlar altında iki gözlenebilir *uyuşumlu* olur? Açıkça, uyuşumlu işlemciler, ortak özvektörler kümesine (bazına) sahip işlemciler ile temsil edilir öyle ki yukarıda az önce verilen tartışma geçersiz kalır. Bu gözlenebilirlerin *sıradeğişmeli* olması gerektiğini ima eder.

$$[A, B] \equiv AB - BA = 0$$

Bunu görmek için, ON bir baz oluşturan ortak özvektör kümesini $|a, b\rangle$ ile gösterelim :

$$A|a, b\rangle = a|a, b\rangle, \qquad B|a, b\rangle = b|a, b\rangle, \qquad \langle a, b|a', b'\rangle = \delta_{aa'}\delta_{bb'}$$

Elimizde

$$AB|a, b\rangle = bA|a, b\rangle = ba|a, b\rangle = aB|a, b\rangle = BA|a, b\rangle$$

var. $[A, B]$ işlemcisi bazın her bir elemanını sıfır vektörüne gönderimlediği için, ve her bir vektör bu bazda açılabildiği için $[A, B]$'nin sıfır işlemcisi olacağı sonucuna varırız.

Dolayısıyla, eğer bir çift Hermitesel işlemci ortak özvektör bazına sahip ise bunlar sıradeğişmeli olmalıdır. Doğrusal cebirden gelen (sonlu boyutlu vektör uzayları için) temel bir sonuç, bunun tersinin de geçerli olduğudur. Eğer iki Hermitesel işlemci sıradeğişmeli ise bunlar ortak bir ON özvektör bazı kabul ederler. Böylece, uyuşumlu gözlenebilirler uyuşumlu işlemcilerle temsil edilir. Fiziksel olarak, uyuşumlu işlemcilerin - spinin farklı bileşenlerinin aksine - değerlerinin kesinlik derecesinde belirlenebileceği durumlar bulunması olasıdır. Aynı şekilde, uyuşumsuz gözlenebilirler sıradeğişmeli olmayan işlemcilerle temsil edilirler. Uyuşumsuz işlemciler için, değerlerinin istatistiksel kesinlikle belirlenemediği durumlar olacaktır. Stern-Gerlach deneyinde şekillenen doğanın sıradışı özelliğinin, ilgili doğrusal işlemcilerin sıradeğişimi ile gözlenebilirlere ilişkilendirilmiş *cebirsel yapı*da kodlanmış olduğunu görüyoruz.

*Bunu görmek için, Schwarz eşitsizliğini kullanın - alıştırma :

$$|\langle a|b\rangle|^2 \leq \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle, \qquad |a\rangle = (sabit)|b\rangle \Rightarrow \text{eşitlik}$$