Ders 2

Metindeki ilgili bölümler §1.2

Spin 1/2'nin kuantum kuramı

Şimdi, elektron spininin, daha önce anlatılan deneysel gerçeklerle örtüşen, kuantum mekaniksel bir tarifini vermeye çalışacağız.

Kuantum mekaniğinin kurallarını kısaca ifade ederek başlayalım. İlerledikçe bunların ne anlama geldiğini göstereceğiz. Başlangıçta büyük resmi bilmek en iyisidir.

Kural 1

Gözlenebilirler (kompleks) $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında kendine eşlenik işlemcilerle temsil edilir.

Kural 2

Durumlar $\mathcal{H}$'da birim vektörlerle gösterilir. A gözlenebilirinin $|\psi\rangle$ durumundaki beklenen değeri

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

köşegen matris elemanı ile verilir.

Kural 3

Zaman gelişimi $\mathcal{H}$'da sürekli bir üniter dönüşümdür.

Şimdi spin 1/2 bir parçacığın bir modelini kurmak için Kurallar 1-2'yi kullanacağız. Kural 3'e bir süre ihtiyacımız olmayacak (Bölüm 2'ye kadar). Bir spin 1/2 sistemin, 3-d Öklid uzayında bir vektör tanımlayan, $\mathbf{S}$ gözlenebiliri ile tamamen tasvir edilebileceğini kabul edelim. Bu itibarla, $\mathbf{S}$ gerçekten de herbiri (Hilbert) vektör uzayında (kendine eşlenik) doğrusal işlemci olan ve S_x, S_y ve S_z olarak etiketlenen 3 gözlenebilirin bir kolleksiyonudur. $\mathbf{S}$'nin herhangi bir bileşenine ait ölçümün olası sonuçlarının $\pm\hbar/2$ olduğunu görmüştük. Göreceğimiz gibi, bu gözlenebilirlerden birine ait ölçümün olası sonuçlarının kümesi iki değere sahip olduğu için durum vektörlerinin Hilbert uzayını iki boyutlu olarak kurmalıyız. İki boyutlu bir Hilbert uzayı* Hermitesel skalar çarpımlı kompleks bir vektör uzayıdır. Şimdi bunların tümümnün ne anlama geldiğini açıklayalım.

*Hilbert uzayı, belirli bir kapalılık koşuluna bağlı ve skalar çarpımlı vektör uzayıdır. Aslında, bu kapalılık koşulu sonlu boyutlu vektör uzayları için gereksizdir. Dolayısıyla bunun için şimdilik endişe etmemize gerek yok.

Kuşkusuz daha önce gördüğünüz için vektör uzayının formal tanımı ile uğraşmayacağım. Siz bunu tekrar gözden geçirmek isteyebilirsiniz. Vektör uzayının elemanlarını $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$, vb. sembollerle gösteririz. Elbette, yeni vektörler yapmak için bunlar "toplanabilir" ki bunu

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle$$

ile gösteririz. Skalerlerin (kompleks sayıların) kümesini a, b, c, vb. sembolleri ile gösteririz. Bir $|\psi\rangle$ vektörünün c ile skaler çarpımı başka bir vektördür ki

$$c|\psi\rangle \equiv |\psi\rangle c$$

ile gösterilir. $|\alpha\rangle$ ve $|\beta\rangle$ vektörlerinin Hermitesel skaler çarpımını

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$$

gösterimi ile simgeleriz. Skaler çarpım ayrıca

$$\langle\alpha(a|\beta\rangle) \equiv \langle\alpha|a|\beta\rangle = a\langle\alpha|\beta\rangle.$$

eşitliğini sağlar.

Eğer tüm bunlar sizde bir şaşkınlık hissi uyandırıyorsa herhalde lineer cebir altyapınızın güçlendirilmeye ihtiyacı vardır. Bazı basit örnekleri, şimdi yapacağımız sembollere anlam vermeye yönelik, çalışmak çabuk bir onarımdır.

Vektör uzayları - başlangıç örnekleri

Burada, az önceki malzemenin bir kaç basit örneğini bulacaksınız.

İlk olarak, sıradan uzayda konum vektörlerinin kümesini düşünün. Toplamın bileşenlerce veya paralelkenar kuralı yoluyla tanımlandığı bir *gerçel* vektör uzayı oluştururlar. Skaler çarpım, bileşenlerle veya vektörün boyunun ölçüsünü alarak (skaler negatifse yönünü ters çevirerek) tanımlanır. İki vektörün skaler çarpımı aşına olduğumuz nokta çarpımıdır. Bu bir gerçel vektör uzayı olduğu için kompleks eşlenik işi önemsizdir.

İkinci ve şimdiki amaçlarımız için çok daha önemli olarak, $\mathbb{C}^2$ *kompleks* vektör uzayını ve ikili kompleks sayıları düşünün. Bu vektör uzayının elemanları kompleks öğeli sütun matrisleri tarafından tanımlanabilir, örneğin,

$$|\psi\rangle \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Toplam bileşenlerce alışkın olduğumuz yoldan tanımlanır. Skaler çarpım da bileşenlerce, sütunun herbir elemanın çarpımı ile tanımlanır, örneğin,

$$c|\psi\rangle \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} ca \\ cb \end{pmatrix}.$$

İki vektörün

$$|\psi_1\rangle \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \qquad |\psi_2\rangle \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

skaler çarpımı,

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^* & b_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1^* a_2 + b_1^* b_2$$

ile verilir.

Bu iki örneğin herbirinde yukarıda listelenen çeşitli soyut özellikleri doğrulayabilmelisiniz. Skaler çarpıma özellikle önem verin.

Vektörleri tam olarak sütun vektörleri ile tanılamaktan sakındığımıza dikkat edin. Bunun nedeni, bir sütun vektörünün gerçekte verilen bir bazda bir vektörün bileşenleri olarak tanımlandığı bakış açısını uyarlayacağımızdandır. Biri, bazı değiştirmek suretiyle aynı vektöre karşılık gelen sütun vektörünü değiştirebilir. Şimdilik, bu inceliği güvenli bir şekilde görmezden gelebilir ve $|\psi\rangle$, vb. gösterimini, sütun ve satır vektörleri üzerinde oynama yapmanın süslü bir yolu olarak düşünebilirsiniz. Bu gösterimin yorumunu daha sonra sıkılayacağız.

Aslında, her 2-boyutlu kompleks vektör uzayı yukarıdaki formda (sütun vektörleri, vb.) ifade edilebilir. Dolayısıyla, spin 1/2 sistemini modellemek için kullanılacak vektör uzayı bu matematiksel temsile sahiptir. Bunu, takibeden kısımlarda kapsamlıca kullanacağız.

Bralar ve ketler

Bir vektör uzayının elemanları için $|\alpha\rangle$ gösterimini halihazırda kullandık. Kuşkusuz, bunları "vektörler" olarak adlandırabileceğimiz gibi alışılagelmiş şekilde - Dirac'ı takip ederek - "ketler" olarak da isimlendirebiliriz ki bunu az sonra izah edeceğiz. Hilbert uzayında herbir kete bağdaşık, $\mathcal{H}$'a "dual" faklı bir vektör uzayında yaşayan bir başka çeşit vektör vardır. Bu dual vektör uzayını H^* olarak biliriz ve bu uzayın elemanları "dual vektörler" veya "bralar" olarak adlandırılır. Eğer ketleri sütun vektörleri olarak düşünürseniz, bralar satır vektörleri olur ve bir ket ile bir bra arasındaki ilgi Hermitesel eşlenik † (kompleks eşlenik - transpoz) ile tesir eder. Daha genel olarak, her $|\psi\rangle$ vektörü $\mathcal{H}$ üzerinde skaler çarpım ile tanımlanan F_ψ lineer fonksiyonunu,

$$F_\psi(|\alpha\rangle) = \langle\psi|\alpha\rangle \tag{1}$$

belirler. Bir vektör uzayındaki tüm lineer fonksiyonların kümesi yine bir vektör uzayıdır - dual vektör uzayı. Bir Hilbert uzayı için, dual vektör uzayı, yukarıda işaret edildiği şekilde orijinal vektör uzayı ile tarif edilir. F_ψ yerine, (1) tarafından tanımlanan lineer fonksiyon için $\langle\psi|$ gösterimini kullanırız. Böylece, $|\psi\rangle$ keti bir $\langle\psi|$ brası tanımlar ki bu $\mathcal{H}$ üzerinde

$$|\alpha\rangle \to \langle\psi|\alpha\rangle$$

yoluyla bir lineer fonksiyondur. Bazen,

$$\langle\psi| = (|\psi\rangle)^\dagger$$

yazarız ki sütun ve satır vektörleri cinsinden düşünüyorsanız bu tam yerine oturur. Braların, kompleks bir vektör uzayı tanımladıkları için, herzamanki gibi toplanabileceğini ve skaler çarpımlarının yapılabileceğini not edin. Aşikar gösterimi :

$$\langle\alpha| + \langle\beta| = \langle\gamma|, \qquad c(\langle\alpha|) = c\langle\alpha| = \langle\alpha|c$$

ve benzerleri gibi kullanırız. Özel olarak, $c|\psi\rangle$ ketine karşılık gelen branın kompleks eşlenik içerdiğini not edin :

$$(c|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|c^*.$$

Bunu görmek için $|\gamma\rangle = c|\psi\rangle$ ile tanımlanan lineer bir fonksiyon düşünürüz. Bir $|\alpha\rangle$ vektörü üzerinde hesaplayarak

$$\langle\gamma|\alpha\rangle = \langle\alpha|\gamma\rangle^* = (\langle\alpha|c|\psi\rangle)^* = c^*\langle\alpha|\psi\rangle^* = c^*\langle\psi|\alpha\rangle$$

elde ederiz.

Bu "bra" ve "ket" terminolojisinin kökeni, vektörler ve lineer fonksiyonların birbirleri ile, *bracket* (parantez) gösterimini kullanan $\langle\psi|\alpha\rangle$ skaler çarpımı yoluyla, eşleşmelerinden gelir. Anladınız mı? Bu terminoloji Dirac tarafından sunulmuştur ve kullandığımız bu gösterime "Dirac'ın bra-ket gösterimi" denir.