MIT Açık Ders Malzemeleri
http://ocw.mit.edu

# 18.702 Cebir II
2008 Bahar

Bu materyallerden alıntı yapmak veya Kullanım Şartları hakkında bilgi almak için http://ocw.mit.edu/terms ve http://tuba.acikders.org.tr sitelerini ziyaret ediniz.

## FONKSİYON CİSİMLERİ

Karmaşık $t$-düzlemini $T$, ve $t$ ye bağlı rasyonel fonksiyonlar cismi $\mathbb{C}(t)$ yi $F$ ile gösterelim. $F$ nin elemanları, $p$ ile $q$ karmaşık polinomlar ve $q \neq 0$ olmak üzere $p(t)/q(t)$ kesirleridir. Fonksiyon cisimleri, $F$ nin sonlu cisim genişlemeleridir.

$K$, $F = \mathbb{C}(t)$ üzerinde derecesi $n$ olan bir fonksiyon cismi ve $\alpha$ bu genişlemenin ilkel elemanı olsun. $f$, $K = F(\alpha)$ ile $F[x]/(f)$ izomorf olacak biçimde, $\alpha$ için $F$ üzerindeki indirgenemez polinom olsun. Katsayılardaki paydaları temizleyerek, $f$ yi $\mathbb{C}[t,x]$ içinde bir indirgemez polinoma dönüştürüp

$$f(t,x) = a_n(t)x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1(t)x + a_0(t), \tag{2}$$

biçiminde yazarız. Burada $t$ ye bağlı $a_i(t)$ polinomlarının ortak böleni 1 dir. $f$ polinomunun $\alpha$ ilkel elemanının seçimine bağlı olduğunu hatırlamak önemlidir.

Bir $f(t,x)$ polinomunun *Riemann yüzeyi* $X$, karmaşık $(t,x)$-uzayı $\mathbb{C}^2$ içinde $f$ nin sıfırlarının oluşturduğu geometrik yerdir. $x$ e bağlı derecesi $n$ olan bir $f(t,x)$ polinomunun Riemann yüzeyi $T$ nin bir $n$-yapraklı çatallı örtüsüdür. Çatal noktaları, üzerinde $X$ in $n$ den az noktası olan $t = t_0$ noktalarıdır. Bunlar, $f$ ile $\frac{\partial f}{\partial x}$ in ortak çözümünün olduğu noktalardır.

Esas olarak, Riemann yüzeyleri hakkında söylediğimiz her şey, sonlu sayıda noktanın dışında geçerlidir. Dolayısıyla, şu gösterimi kullanırız: $X$ sonsuz bir kümeyse, $X'$, özellikle belirtilmemiş bir $\triangle$ sonlu altkümesinin $X$ den çıkarılması ile elde edilen kümeyi gösterir:

$$X' = X - (\text{değişken sonlu küme}). \tag{1}$$

İlerlerken, aşağıdaki basit örnek hep elimizde olacak,

$$f(t,x) = x^2 - t. \tag{3}$$

Bu polinomun Riemann yüzeyi sayfa 518'de çizilmiştir.

$K$ ve $L$ cisim genişlemelerinin *izomorfizmi*, $F$ üzerinde birim fonksiyon olan $\varphi : K \to L$ cisimlerinin cisim izomorfizmidir.

$T$ nin çatallı örtülerinin $X \to Y$ *izomorfizmi*, bu yüzeylerin $T$ ye izdüşümleri ile uyumlu olan sürekli, bire-bir ve örten $\theta : X' \to Y'$ fonksiyonlarıdır. Buradaki üsler, $\theta$ fonksiyonunun tanımlı olması için $X$ ve $Y$ den çıkarmayı beklediğimiz sonlu sayıdaki noktaya işaret etmektedir.

Gevşek bir biçimde ifade edecek olursak, eğer $S'$ yol bağlantılıysa, bir $\pi : S \to T$ çatallı örtüsünü de yol bağlantılı olarak adlandırırız. Bu, $S$ nin yeterince büyük her $\triangle$ sonlu altkümesi için, $S - \triangle$ kümesinin yol bağlantılı olması demektir.

Sıradaki teorem $F$ nin cisim genişlemelerini tanımlar. Bu teoremin kanıtı, ne yazık ki burada sunmak için çok uzundur.

**Teorem 4.** *[Riemann Varlık Teoremi]*
**(a)** *$f(t,x)$ indirgenemez bir polinom olsun. $f$ nin Riemann yüzeyi, $T$ nin bir yol bağlantılı çatallı örtüsüdür.*

**(b)** *$S$, $T$ nin bir yol bağlantılı çatallı örtüsü olsun. Riemann yüzeyi $S$ ye izomorf olan indirgenemez bir $f(t,x)$ polinomu vardır.*
**(c)** *$f(t,x)$ ile $g(t,x)$ indirgenemez polinomlar, $K$ ile $L$ bunların tanımladığı cisim genişlemeleri ve $X$ ile $Y$ yine bunların tanımladığı Riemann yüzeyleri olsun. $K$ ve $L$ nin, $F$ nin izomorf cisim genişlemeleri olması için gerek ve yeter koşul $X$ ve $Y$ nin, $T$ nin izomorf çatallı örtüleri olmasıdır.*

Bu teorem, iki polinomum tanımladığı cisim genişlemelerinin izomorf olup olmadıklarına karar vermeyi sağlayan bir yöntem sunar. Sık sık kullanılabilecek basit bir kriter, çatal noktalarının çakışması gerektiğidir. Ancak, $T$ nin bir $S$ çatallı örtülüsü verilirse, Riemann yüzeyi $S$ olan bir polinom bulmak zor olabilir. Bir çok polinom izomorf cisim genişlemeleri tanımlar, fakat beklenenin aksine, bir çok seçenek olduğunda bunlardan birini bulmak genellikle daha zorlaşır.

**(c)** seçeneğinin bir kısmını göstermek görece daha kolaydır:

**Önerme 5.** *$f(t,x)$ ile $g(t,y)$ indirgenemez polinomlar, ve $X$ ile $Y$, $K = F[x]/(f)$ ile $K = F[y]/(g)$ cisim genişlemelerine karşılık gelen Riemann yüzeyleri olsun. Cisim genişlemelerinin bir $\varphi : K \to L$ izomorfizmi, Riemann yüzeylerinin $\theta : X \to Y$ izomorfizmini tetikler.*

*Proof.* $t$ değişkenini geçici olarak düşürelim ve $f(t,x)$ yerine $f(x)$, vb. yazalım. $\varphi$ izomorfizmi, $g(y)$ nin $K$ içinde, bir $b(x)$ polinomunun modulo $(f)$ kalanı olarak gösterilebilecek bir $\beta$ kökünü verir. $\theta : X \to Y$ fonksiyonu, $\theta(t,x) = (t, b(x))$ biçiminde tanımlanır.

$g(\beta) = 0$ olduğundan, $g(b(x))$ elemanı $F[x]$ nin $(f)$ ideali içerisindedir. Dolayısıyla, $g(b(x)) = h(x)f(x)$ eşitliğini sağlayan bir $h(x)$ polinomu vardır. $t$ değişkenini gösterimde tekrar yerine koyarsak,

$$g(t, b(x,t)) = h(t,x)f(t,x) \tag{6}$$

elde ederiz. $(t,x)$, $X$ in bir noktasıysa, $f(t,x) = 0$ ve $g(t, b(t,x)) = h(t,x)f(t,x) = 0$ olur, ve bu nedenle $\theta(t,x)$, $Y$ nin bir noktası olur. $K$ ve $L$ nin rolleri değiştirilerek ters fonksiyon elde edilir.

$b(x)$ ve $h(x)$ katsayıları $F$ den polinomlar olduğundan, paydalarda $t$ ye bağlı polinomlar yer alabilir. Bu nedenle, $\theta$ bazı noktalarda tanımsız olabilir.

### Kes ve Yapıştır

"Kes ve Yapıştır" bir çatallı örtüyü inşa etmek veya bozmak için kullanılan bir yöntemdir.

$x^2 - t$ polinomunun Riemann yüzeyi olan $X$ örneğimize geri dönelim. $X$ i, sayfa 518'deki şeklin iki katlı yeri olan negatif gerçel eksen boyunca açarsak, bir parçası re $x > 0$ ve diğer parçası re $x < 0$ olan iki parçaya ayrılır. Kestiğimiz yer boyunca ne olduğunu ihmal edersek, bu parçalardan her birinin $t$-düzlemi $T$ ye bijektif izdüşümleri vardır.

Bu prosedürü tersine çevirerek, $X$ e izomorf bir çatallı örtüyü şu şekilde oluşturabiliriz: $T$ nin üzerine karmaşık düzlemin iki kopyası olan $S_1$ ve $S_2$ yi yerleştirelim ve negatif gerçel eksen olan $(-\infty, 0]$ boyunca bunları keselim. $T$ nin bu kopyaları, *yaprak*lar olarak adlandırılacak. Daha sonra, $S_1$ in "A yönü"nü, $S_2$ nin "B yönü"ne ve aynı biçimde "B Yönü"nü "A Yönü"ne yapıştıralım (Sayfa 520'deki şekle bakınız). Bu yapıştırmayı, yüzeyin kendisini kesmesine izin vermeden yapabilmek için dört boyuta ihtiyaç duyarız.

$n$-yapraklı bir $S \to T$ çatallı örtüsünün verildiğini varsayalım, ve $p_1, ..., p_k$ $T$ deki çatal noktalarının kümesi olsun. $\nu = 1, ..., k$ için $p_\nu$ noktasından sonsuza giden birbirleriyle kesişmeyen $C_\nu$ yarı doğruları seçeriz. $T$ yi $C_\nu$ yarı doğruları boyunca ve $S$ yi de bu yarı doğruların üzerinde yer alan tüm noktalarda keserek açık hale getiririz (sayfa 521'e bakınız).

Keserek açık hale getirmek ile neyi kastettiğimizi daha belirginleştirmeliyiz. $T$ yi keserek açık hale getirmekle, $C_\nu$ yarı doğruları üzerindeki $p_\nu$ de dahil tüm noktaları ve $S$ yi keserek açık hale getirmekle ise bu yarı doğrular üzerindeki tüm noktaları çıkarttığımız konusunda anlaşalım.

**Lemma 7.** *$S$, $C_\nu$ yarı doğruları üzerinde kesilerek açık hale getirildiğinde, her birinin izdüşümü, kesilmiş $T$ düzlemine bijektif olan $n$ tane rasgele numaralandırılmış $S_1, ..., S_n$ yaprağının birleşimi olacak biçimde bileşenlerine ayrılır.*

Bu doğrudur, çünkü birincisi, kesilmiş yüzey $S$, kesilmiş yüzey $T$ nin çatallı olmayan bir örtü uzayıdır ve ikincisi, $T$ deki yarı doğruların tümleyeni basit bağlantılı bir kümedir. Basit bağlantılı bir kümenin çatallı olmayan örtüsünün bileşenlerine ayrılması sezgisel olarak akla yakın gelir. Bir $p$ noktasını kapsayan yaprak, kesik kısımlar üzerinden geçmeyen bir yol üzerinden $p$ ile birleştirilebilen bütün noktaları kapsar. Bunun kanıtı, [Munkres, *Topoloji* sayfa 342, Alıştırma 8] içinde alıştırma olarak verilmiştir.

Şimdi, $S$ yüzeyini yeniden oluşturmak için kesilmiş $T$ düzleminin $n$ kopyasını alalım, bunları "yaprak" olarak adlandırıp $S_1, ..., S_n$ olarak etiketleyelim. Bunları $T$ üzerine yerleştirelim. Kesikler dışında, bu yaprakların birleşimi çatallı örtümüzdür ve $S$ yi yeniden oluşturmak amacıyla yaprakları kesikler boyunca yapıştırmak için bir kural tanımlamalıyız.

$T$ üzerinde $p_\nu$ noktasının etrafına saatin ters yönünde bir daire çizeriz (sayfa 521'e bakınız) ve $C_\nu$ yarı doğrusunun $C_\nu$ yü kesmeden önce geçtiğimiz yönünü "yön $A$" ve kestikten sonra geçtiğimiz yönünü "yön $B$" olarak adlandırırız. Benzer biçimde bir $S_i$ yaprağı üzerinde bunlara karşılık gelen yönleri sırasıyla $A_i$ ve $B_j$ olarak adlandırırız. O zaman, $S$ için yapıştırma kuralı, $A_i$ nin, bir $j$ için $B_j$ ile yapıştırılması anlamına geliyor. Bu kural, $1, ..., n$ indekslerinin $i$ yi $j$ ye gönderen $\sigma_\nu$ permütasyonu ile tanımlanır.

Rasgele $\sigma_\nu$ permütasyonlarını kullanarak bir örtü inşa edebileceğimiz oldukça açıktır. Sadece, çatal noktalarının kendisinde ne olacağı açık değildir. Belirsizliği ortadan kaldırmak için, çatal noktalarını ve bunların üzerinde yatan noktaları ihmal ederiz.

*Çatallanma Verisi.* $\nu = 1, ..., k$ için $1, ..., n$ indekslerinin bir $\sigma_\nu$ permütasyonu.

*Yapıştırma Açıklamaları.* $\sigma_\nu(i) = j$ ise, $C_\nu$ boyunca $A_i$ yönünü $B_j$ yönü ile yapıştırınız.

Yapıştırma tamamlandığında kesik yer kalmaz ve yaprakların birleşimi bir örtü verir. Sayfa 518'de gösterilen Riemann yüzeyi için olduğu gibi, elde edilen, kendisini kesmeyen yüzeyin gömülmesi için de dört boyuta ihtiyaç vardır.

Eğer $\sigma_\nu$ permütasyonu birim permütasyonsa, her yaprağın $C_\nu$ boyunca kendisine yapıştırıldığını belirtelim. Bu durumda, $p_\nu$ noktasının "gerçek" bir çatal noktası olmadığını söyleriz.

Sıradaki sonuç tartışmayı özetlemektedir:

**Sonuç 8.** *Her $n$-yapraklı $S \to T$ çatallı örtüsü, kes ve yapıştır işlemi ile inşa edilmiş olanlardan birine izomorftur.* □

Yaprakların numaralandırılmasının rasgele olduğunu ve Riemann yüzeyi için "en üst yaprak" gibi bir kavramın içsel bir anlamı olmadığını belirtmek önemlidir. Eğer bir en üst yüzey olsaydı, $x$ fonksiyonunu, bu yapraktaki değerini seçerek tek değerli bir fonksiyon olarak tanımlayabilirdik. Bu ancak Riemann yüzeyi kesilerek açık hale getirildikten sonra yapılabilir. Esas nokta budur: Yüzey üzerinde dolaşmak bizi bir yapraktan bir yaprağa sürükler.

Yaprakların rasgele numaralandırılmasının dışında, $\sigma_\nu$ permütasyonları $S$ örtüsü tarafından biricik olacak biçimde belirlenir. Numaralandırmanın bir $\rho$ permütasyonu ile değiştirilmesi, her $\sigma_\nu$ permütasyonunu $\rho\sigma_\nu\rho^{-1}$ eşleniği ile değiştirecektir.

**Sonuç 9.** *Kes ve yapıştır işlemi ile, aynı $p_\nu$ noktaları ve $C_\nu$ yarı doğruları kullanılarak inşa edilmiş çatallı örtüler $X$ ve $Y$ olsun. Yapıştırma verisi ile tanımlanan permütasyonlar, sırasıyla $\sigma_\nu$ ve $\tau_\nu$ olsun. $X$ ve $Y$ nin izomorf çatallı örtüler olması için gerek ve yeter koşul, her $\nu$ için $\tau_\nu = \rho\sigma_\nu\rho^{-1}$ eşitliğini sağlayan bir $\rho$ permütasyonunun olmasıdır.* □

**Önerme 10.** *Kes ve yapıştır ile inşa edilmiş $S$ çatallı örtüsünün yol bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul, $\sigma_1, ..., \sigma_k$ permütasyonlarının, yapraklar kümesine geçişken olarak etki eden, simetrik grubun bir $H$ altgrubunu üretmesidir.*

*Kanıt.* Her $S_i$ yaprağı yol bağlantılıdır. $\sigma_\nu$ permütasyonlarından biri $i$ indeksini $j$ ye gönderiyorsa, $S_i$ ve $S_j$ yaprakları $C_\nu$ boyunca yapıştırılır. Bu durumda, $S_i$ nin bir noktasından $S_j$ nin bir noktasına kesik üzerinden giden kısa bir yol olacaktır. Yaprakların kendileri yol bağlantılı olduğundan, $S_i$ ile $S_j$ nin herhangi iki noktası bir yolla birleştirilebilir. Dolayısıyla, $S$ nin yol bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul, her $i, j$ indeks çifti için, $i = i_0 \to i_1 \to ... \to i_r = j$ koşulunu sağlayan bir $\sigma_\nu$ permütasyonları dizisinin olmasıdır. Bunun doğru olması için gerek ve yeter koşul, $H$ grubunun geçişken olarak etki etmesidir. □

### Permütasyonları Hesaplamak

Bir Riemann yüzeyinin yapıştırma verisini tanımlayan $\sigma_\nu$ permütasyonlarını belirlemek ortaya iki problem çıkarır. Birincisi "yerel problem". Her çatal noktası $p$ de, bu noktanın etrafına bir daire çizildiğinde oluşan, yaprakların $\sigma$ permütasyonunu belirlemeliyiz. Gördüğümüz gibi, $\sigma$, yaprakların numaralandırılmasına dayanır. İkincisi, yaprakları, her çatal noktası için olduğu biçimde numaralandırdığımıza emin olmalıyız.

Yerel problem çözülebilir, fakat karmaşık durumlarda sayıyı elle kontrol etmek zordur. Kuşkusuz, bilgisayarla bir problem olmayacaktır. Bilgisayarın yaptığı şudur. Kesik düzlem $T$ içinde, bir $b$ "taban noktası" seçer ve $f(b,x)$ polinomunun $n$ farklı kökünü uygun bir kesinlikle nümerik olarak hesaplar. Bu kökleri rasgele bir biçimde, diyelim $\gamma_1, ..., \gamma_n$ olarak numaralandırır ve $\gamma_i$ kökünü kapsayan yaprağı $S_i$ olarak adlandırarak, yaprakları etiketlendirir. Daha sonra, bir çatal noktası olan $p_\nu$ noktasının yakınındaki $b_\nu$ noktasına, kesiklerden geçmemeye özen göstererek gider. $\gamma_i$ kökleri sürekli olarak değişir ve bilgisayar, bu değişimi her küçük adımda yeniden kök hesaplayarak takip edebilir. Bu, ona $b_\nu$ noktasındaki yaprakları nasıl etiketlendireceğini söyler. Daha sonra, $\sigma_\nu$ permütasyonunu belirlemek için, bilgisayar $p_\nu$ etrafında saatin ters yönünde bir yol takip eder ve yol boyunca kökleri yeniden hesaplar. Yol, $C_\nu$ kesiğinden geçtiğinden, $b_\nu$ noktasına geri döndüğünde, köklere $\sigma_\nu$ permütasyonu etki edecektir. Söylemek gereksiz, bunu elle yapmak inanılmaz zordur. Daha sonra sunacağımız örneklerde bunun üstesinden gelmenin yollarını bulacağız.

Yerel problemin, tam olmayan bir analizini verelim. Yöntemimiz, Riemann yüzeyini, bildiğimiz bir başkası ile, bir başka deyişle $y^k - t$ polinomunun $Y$ Riemann yüzeyi ile ilişkilendirerek permütasyonu belirlemektir. Bu, $T$ nin sadece orijinde çatallı olan bir $k$-yapraklı örtüsüdür ve yaprakların uygun bir numaralandırılması ile permütasyon çevrimsel olacaktır. Bunu görmek için, $T$ deki orijin etrafındaki bir çembersel yolu $t = re^{i\theta}$ olarak parametrize edelim. $y^k = t$ olduğundan, $Y$ nin bu yol üzerinde yatan kısmını $\rho^k = r$ ve $k\eta = \theta$ olmak üzere $y = \rho e^{i\eta}$ biçiminde parametrize edebiliriz. Daha sonra, eğer $t = r$, $y = \rho$ noktasından başlarsak, $\eta$ nın değeri 0 dan $2\pi$ ye değiştiğinde $T$ deki çembersel bölge orijinin etrafında $k$ kez döner. Bu, yaprakların permütasyonunun çevrimsel olduğunu gösterir.

Bir Riemann yüzeyinin, *Puiseux serisi* olarak bilinen, $t$ nin kesirli üslerine bağlı bir kuvvet serisi tarafından yerel olarak parametrize edildiği bilinmektedir. Bu seriler oldukça karmaşıklaşabilir. Bu nedenle, sık sık kullanılan bir özel durum ile yetineceğiz.

$f(t,x) = 0$ ile verilen Riemann yüzeyi $X$, ve $X$ in bir çatal noktası $t_0$ olsun. $t = t_0$ ı yerine koyduğumuzda, tek değişkenli bir $f^0(x) = f(t_0, x)$ elde ederiz.

**Önerme 11.** *Yukarıdaki gösterimle, $x_0$ $f^0(x)$ polinomunun bir kökü olsun.*

- *$x_0$ ın $f^0(x)$ in $k$-katlı bir kökü olduğunu,*
- *$\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevinin $(t_0, x_0)$ noktasında 0 olmadığını*

*varsayalım. Bu durumda, $t_0$ noktasındaki yaprakların permütasyonu bir $k$-çevrimdir.*

*Kanıt.* $(t_0, x_0)$ noktasını orijine taşımak için değişkenleri değiştiririz ve

$$f(t,x) = \sum a_{ij} t^i x^j \tag{12}$$

yazarız. Birinci madde, $a_{0j}$ katsayılarının $j < k$ için 0 ve $a_{0k} \neq 0$ olduğunu söyler. İkinci madde, $a_{10} \neq 0$ olduğunu söyler. Dolayısıyla, $u(0) \neq 0$ ve $v(0,0) \neq 0$ olmak üzere $f$ polinomu

$$f(t,x) = x^k u(x) - tv(t,x) \tag{13}$$

biçimde yazılır.

Herhangi bir $s$ karmaşık sayısı için, $(1+z)^s$ terimi

$$(1+z)^s = 1 + \binom{s}{1} z + \binom{s}{2} z^2 + ... \tag{14}$$

$|z| < 1$ için yakınsayan bir binom serisi açılımına sahiptir. Burada,

$$\binom{s}{k} = \tfrac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \tag{15}$$

dir.

$\varphi(t,x) = \frac{u}{v}$ olsun. $\varphi(0,0) \neq 0$ olduğundan, uygun bir $c$ skaleri ve $z = z(t,x)$ fonksiyonu için $\varphi = c(1+z)\varphi$ yazabiliriz. Daha sonra, $s = \frac{1}{k}$ ve $\psi(t,x) = \varphi(t,x)^s$ olmak üzere,

$$x^k \psi^k = t \tag{16}$$

eşitliği yazılabilir. Birimin kökü ile ilgili bir belirsizlik olsa da, kökleri uygun bir biçimde seçerek ve $y^k = t$ eşitliğini de kullanarak, $y = x\psi(t,x)$ elde ederiz. Bu eşitlik $Y$ Riemann yüzeyinden $X$ e bir yerel izomorfizm tanımlar. $\square$

**Örnek 17.** $f(t,x) = x^2 - t^3 + t$ ve $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ dir. Bu nedenle, $X$ iki yapraklı bir örtüdür. Üç tane çatal noktası vardır, $t = 0$, $t = 1$ ve $t = -1$. Ayrıca, $\frac{\partial f}{\partial t} = -3t^2 + 1$ olduğundan, tüm çatal noktalarında Önerme 11 kullanılabilir. Dolayısıyla, bu noktaların her birindeki yaprakların permütasyonu $(\mathbf{1}\ \mathbf{2})$ transpozisyonudur. Bu durumda, yaprakların numaralandırılması konusunda dikkatli olmamıza gerek yoktur, çünkü yer değiştirmek transpozisyonu değiştirmeyecektir.

**Örnek 18.** $f(t,x) = x^3 - 3x + t$ ve $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3$ dür. Burada $X$ üç yapraklı bir örtüdür. Çatal noktaları $p_1 : t = 2$ ve $p_2 : t = -1$ dir. $\frac{\partial f}{\partial t} = 1$ olduğundan, yine Önerme 13 kullanılabilir.

$p_1$ noktasındaki $\sigma_1$ permütasyonunu belirlemek için, $f$ polinomunda $t = 2$ yerleştirerek $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x-2)$ elde ederiz. $(2,1)$ noktasında çift kat kök vardır. $\frac{\partial f}{\partial t}$ hiçbir yerde 0 olmadığından, $\sigma_1$ permütasyonu 2-çevrim içerir ve üç indeksin bir permütasyonu olduğundan bir transpozisyondur. Benzer biçimde, $\sigma_2$ de bir transpozisyondur.

Yaprakları $\sigma_1$=($\mathbf{1\ 2}$) olacak biçimde numaralandırabiliriz. $X$ yol bağlantılı olduğundan, $\sigma_1$ ve $\sigma_2$ bir geçişken permütasyonlar grubu üretir. Dolayısıyla, $\sigma_2$ ($\mathbf{2\ 3}$) veya ($\mathbf{1\ 3}$) olmalıdır. $S_1$ ve $S_2$ olarak adlandırılan yaprakları değiştirmek $\sigma_1$ permütasyonunu etkilemeyecek, fakat diğer iki transpozisyonun yerlerini değiştirecektir. Bu nedenle uygun bir numaralandırmayla, $\sigma_1 = (\mathbf{1\ 2})$ ve $\sigma_2 = (\mathbf{2\ 3})$ elde ederiz.

**Örnek 19.** $f(t,x) = x^3 - t(t-1)^2$ ve $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$ dir. $X$ yine üç yapraklı bir örtüdür. Çatal noktaları $t = 0$ ve 1 dir. $f(0,x)$ ve $f(1,x)$ in ikisinin de üç katlı kökleri vardır. $\frac{\partial f}{\partial t} = 3t^2 - 4t + 1$ kısmi türevi $t = 0$'da 0 değildir, bu nedenle bu noktada yaprakların permütasonu çevrimseldir. Uygun bir numaralandırmayla, $\sigma_0$ olarak adlandıracağımız $t = 0$ noktasındaki permütasyon ($\mathbf{1\ 2\ 3}$) olacaktır.

Fakat, $t = 1$ noktasında problemler vardır. Öncelikle, $\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevi $t = 1$ noktasında sıfırdır. Ayrıca, ikinci noktadaki yaprakların numaralandırılmasını nasıl kontrol edebiliriz? Bir önceki örnekte, permütasyonları belirlemek için Riemann yüzeyinin yol bağlantılı olduğunu bilmek yeterliydi. Bu bize burada bir bilgi vermez, çünkü $\sigma_0$ yapraklaran geçişken olarak etki eder.

Sadece en basit durumlarda çalışan bir fikri kullanalım. Fikir, geniş bir $\Gamma$ çemberi etrafında yürüyerek elde ettiğimiz permütasyonu hesaplamaktır. Sayfa 521'deki şekile tekrar bakarsak, büyük bir çembersel yolun her kesikten bir kez geçeceğini görürüz. $C_1$ kesiğinin sağından başladığımızı düşünürsek, yapraklara $\sigma_r \cdots \sigma_2\sigma_1$ çarpım permütasyonu etki edecektir. Elimizdeki durumda bu $\sigma_1\sigma_0$ dır. Bu permütasyonu belirleyebilirsek, $\sigma_0$ ı bildiğimizden, $\sigma_1$ i de elde edebileceğiz.

$u = t^{-1}$ değişken değişikliğini yapalım. $T$ düzleminin *sonsuzdaki noktası* $u = 0$ dır. $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ve $r$ büyük olmak üzere $t = re^{i\theta}$ yolu, oryantasyonun tersine çevrilmiş olması dışında, $\infty$ etrafındaki küçük $u = r^{-1}e^{-i\theta}$ çembersel yolu ile aynıdır. Yol, $\infty$ etrafında, saatin ters yönünde bir çember çizer. Bu yön değişikliğinin etkisi, $\sigma_1\sigma_0$ permütasyonunu tersiyle değiştirmektir:

$f(t,x)$ polinomunda $t = u^{-1}$ yerleştirelim:

$$f(u^{-1},x) = x^3 - u^{-1}(u^{-1}-1)^2 \tag{20}$$

Paydayı temizlersek, $(ux)^3 = (1-u)^2$ elde ederiz. $x = u^{-1}y$ yerleştirirsek:

$$f(t^{-1},t^{-1}x) = h(u,y) = y^3 - (1-u)^2. \tag{21}$$

$u$, 0 ve $\infty$ dan farklı olduğunda, $(t,x) = (u^{-1},u^{-1}y)$ nin tersi vardır. Dolayısıyla, $f = 0$ ve $h = 0$ ile tanımlanan Riemann yüzeyleri izomorftur.

$u = 0$ noktasının üzerine bakarsak, $h(0,y)$ nin üç kökü olduğunu görürüz: 1, $\omega, \omega^2$. Dolayısıyla, $\infty$ bir çatal noktası değildir. Bu $(\sigma_1\sigma_0^{-1}) = 1$ olduğunu gösterir. $\sigma_0 = (\mathbf{1\ 2\ 3})$ olduğundan, $\sigma_1 = (\mathbf{3\ 2\ 1})$ dir.