MIT Açık Ders Malzemeleri
http://ocw.mit.edu

# 18.702 Cebir II
2008 Bahar

Bu materyallerden alıntı yapmak veya Kullanım Şartları hakkında bilgi almak için http://ocw.mit.edu/terms ve http://tuba.acikders.org.tr sitelerini ziyaret ediniz.

**Parçalanış Cisimleri**

Katsayıları $F$ içinde olan ve indirgenemez olması zorunlu olmayan bir $f$ polinomunun $F$ üzerinde bir parçalanış cismi şu özelliklere sahip bir cisim genişlemesidir:

• $K$ cismi $f$ nin tüm köklerini kapsar, bir başka deyişle $\alpha_1, ..., \alpha_n$ $K$ nin elemanları olmak üzere $f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ dir.

• $K$, $F$ üzerinde $f$ nin kökleri olan $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tarafından üretilir.

İkinci özellik, $K$ nin her $\beta$ elemanının (biricik bir biçimde olmasa da) $\alpha = \alpha_1, ..., \alpha_n$ değişkenlerine bağlı bir polinom olarak yazılabileceğini söyler.

Aşağıdaki önemli teoremi kanıtlamak için simetrik fonksiyonları kullanırız:

**Parçalanış Teoremi.** $K$, $F[x]$ içindeki bir $f(x)$ polinomunun $F$ üzerinde bir parçalanış cismi olsun. $F[x]$ deki indirgenemez bir polinom olan $g(x)$ polinomunun $K$'de bir kökü varsa, $K$ cismi $g$ nin tüm köklerini kapsar.

Bu teorem bir parçalanış cismi olan $K$ yi bu özelliğe sahip bir sonlu cisim genişlemesi olarak yeniden tanımlama olanağı verir:

*Bir kökü $K$'de olan $F$ üzerinde indirgenemez bir polinomun tüm kökleri $K$ dedir.*

Bu noktadan sonra $K$ genişlemesini tanımlamak için hangi polinomun kullanıldığı önemli değildir.

Parçalanış teoremini kanıtlamadan önce, kanıtta kullanılmalarının yanısıra kendileri de dikkate değer olan iki önerme türetelim.

İlk önerme, simetrik bir fonksiyon oluşturmak için genel bir yöntem verir. Simetrik grup $S_n$ nin polinom halkası $F[u_1, ..., u_n]$ üzerine etkisi altında herhangi bir $p(u_1, ..., u_n)$ polinomunun yörüngesi $p_1, ..., p_k$ elemanlarına sahip olsun. (Yörüngenin eleman sayısı olan $k$ hakkında söylenebilecek tek şey $S_n$ grubunun eleman sayısı olan $n!$ i böldüğüdür.)

**Önerme 1.** $\{p_1, ..., p_k\}$, değişkenleri $u = u_1, ..., u_n$ olan $p_1$ polinomunun yörüngesi olsun. $k$, $p_1$ in yörüngesindeki eleman sayısı olmak üzere, $w = w_1, ..., w_k$ başka bir grup değişken olsun. Eğer $\varphi(w_1, ..., w_k)$ polinomu $w$ değişkenlerine göre simetrik polinom ise, $\varphi(p_1, ..., p_k)$ polinomu $u$ değişkenlerine göre simetrik polinomdur.

*Kanıt.* Bu, biraz kafa karıştırıcı olması dışında neredeyse sıradan bir doğrudur. $u$ değişkenlerinin bir permütasyonu $\{p_1, ..., p_k\}$ yörüngesine etki ettiğinde yörüngenin bir permütasyonunu verir. Dolayısıyla, $\varphi$ simetrik bir polinom olduğundan, $\{p_1, ..., p_k\}$ kümesinin her permütasyonu, $\varphi(p_1, ..., p_k)$ elemanını kendisine taşır.

İkinci önerme, $F$ nin bir cisim genişlemesi olan $K$ nin bir elemanının $F$ içinde olması durumunda, bunu gösterebilmek için bir yöntem sunar.

**Önerme 2.** Bir $K$ cisim genişlemesinin, katsayıları $F$'de olan bir $f(x) = x^n - a_1x^{n-1} + \cdots \pm a_n$ polinomunun tüm köklerini kapsadığını varsayalım. Bir başka deyişle, $\alpha_1, ..., \alpha_n$ elemanları $K$'de olmak üzere, $f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ olsun. Eğer $q(u_1, ..., u_n)$ katsayıları $F$'de olan simetrik bir polinom ise, $q(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de $F$ nin elemanıdır.

*Kanıt.* Simetrik Fonksiyonlar Teoremi, $q$ polinomunun, katsayıları $F$'de olan ve $s_1(u), ..., s_n(u)$ temel simetrik fonksiyonlarının bir polinomu olarak yazılabileceğini söyler. Bir başka deyişle, $q(u_1, ..., u_n) = Q(s_1, ..., s_n)$ dir. Ayrıca, $a_i = s_i(\alpha)$ olduğunu belirtelim. $u = \alpha$ için

$$q(\alpha_1, ..., \alpha_n) = Q(s_1(\alpha), ..., s_n(\alpha)) = Q(a_1, ..., a_n) \tag{2}$$

elde ederiz. $f$ nin katsayıları olan $a_i$ ler ve $Q$ nun katsayıları $F$ içinde olduğundan, $Q(a)$ da $F$ içindedir. □

*Parçalanış Teoreminin Kanıtı.* Elimizde indirgenemez bir $g \in F[x]$ polinomu ve $g$ nin parçalanış cismi $K$'de yer alan bir $\beta_1$ kökü vardır. $K$ nin $g$ nin tüm köklerini kapsadığını göstermeliyiz. $g$ nin $\beta_1$ için $F$ üzerinde indirgenemez polinom olduğunu belirtelim.

$a_i \in F$ olmak üzere $f(x) = x^n - a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ polinomunun parçalanış cismi $K$ ve $K[x]$ içinde $f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ olsun. $K$, $F$ üzerinde $\alpha_i$ kökleri tarafından üretildiğinden, katsayıları $F$'de olan ve $\beta_1 = p_1(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ eşitliğini sağlayan bir $p_1(u_1, ..., u_n)$ polinomu vardır. Böyle bir polinom seçelim. Simetrik grup $S_n$ nin $u$ değişkenleri üzerine etkisi altında $p_1$ in yörüngesi $\{p_1, ..., p_k\}$ ve $\beta_j = p_j(\alpha)$ olsun. Dolayısıyla, $\beta_1, ..., \beta_k$ $K$ nin elemanlarıdır.

Parçalanış teoremini,

$$h(x) = (x - \beta_1) \cdots (x - \beta_k)$$

polinomunun katsayılarının $F$ içinde olduğunu göstererek kanıtlayacağız. Eğer bu kanıtlanırsa, $\beta_1$ $h$ nin bir kökü olduğundan, $\beta_1$ için $F$ üzerinde indirgenemez polinom olan $g$, $F[x]$'de $h$ yi bölecektir. Dolayısıyla, $K$ $h$ nin tüm köklerini kapsadığından, $g$ nin de tüm köklerini kapsayacaktır.

Diyelim ki

$$f(x) = x^k - b_1x^{k-1} + b_2x^{k-2} - \cdots \pm b_k$$

olsun. $b_1, ..., b_k$ katsayıları, temel simetrik fonksiyonların $\beta$ daki değerleri olarak elde edilir. Ancak, bunlar $k$ değişkene bağlı temel simetrik fonksiyonlardır. Takip etmeyi kolaylaştırmak için, Önerme 1'deki gibi yeni $w_1, ..., w_k$ değişkenleri tanımlar ve bu değişkenlere bağlı temel simetrik fonksiyonları $s'_1(w), ..., s'_k(w)$ olarak adlandırırız. Burada üsleri, değişkenlerin yeni olduğunu hatırlatmak için kullanıyoruz. Bu durumda, $b_j = s'_j(\beta)$ dır.

İki adımda hesabı tamamlarız: İlk olarak, $w_j = p_j(u)$ yerleştiririz. Önerme 1, $s'_j(p_1(u), ..., p_k(u))$ nun $u$ ya bağlı simetrik bir polinom olduğunu söyler çünkü $s'_j(w_1, ..., w_k)$ $w$ ya bağlı simetrik bir polinomdur.

Daha sonra, $u_i = \alpha_i$ yerleştiririz. $s'_j(p_1(u), ..., p_k(u))$, $u$ ya bağlı simetrik bir fonksiyon olduğundan, Önerme 2 $s'_j(p_1(\alpha), ..., p_k(\alpha))$ elemanının $F$ cisminde olduğunu söyler.

Diğer yandan, $p_j(\alpha) = \beta_j$ ve bu nedenle $s'_j(p_1(\alpha), ..., p_k(\alpha)) = s'_j(\beta_1, ..., \beta_k) = b_j$ dir. Dolayısıyla, $b_j$ $F$ içindedir ve iddia edildiği gibi $h$ nin katsayıları $F$ dedir. $\square$