18.702 Cebir II
2008 Bahar

18 Mart 2008

18.702 Problem Seti 6

31 Mart, Pazartesiye

1. $\delta = \sqrt{-6}$ olmak üzere, $\mathbb{Q}[\delta]$ sanal ikinci dereceden (kuadratik) sayı cismindeki R cebirsel tamsayılar halkasının ideallerini betimlemek için Bölüm 11, 7.9'daki yöntemi kullanınız. İdeallerin şekillerini çiziniz ve çizdiğiniz şekillerin halkanın idealleri tarafından temsil edildiğini göstermeyi unutmayınız.

2. $\delta = \sqrt{-3}$ olmak üzere, $R = \mathbb{Z}[\delta]$ olsun. (R, $\mathbb{Q}[\delta]$ nın içindeki cebirsel tamsayılar halkası değildir.) A, 2 ve δ elemanları tarafından üretilen ideal olsun.
(a) A nın maksimal bir ideal olduğunu kanıtlayınız ve R/A halkasını belirleyiniz.
(b) $\overline{A}A$ nın tek üreteçli bir ideal olmadığını, dolayısıyla Ana Lemmanın R için doğru olmadığını kanıtlayınız.
(c) A nın tek üreteçli ideal $(2) = 2R$ yi kapsadığını, fakat A nın (2) yi bölmediğini kanıtlayınız.

3. d tamkare içermeyen ve mod 4'te 1 e eşit olmayan negatif bir tamsayı ve p bir asal tamsayı olsun. $x^2 - d$ (mod p)'de çarpanlarına ayrılırsa, asal p, R içinde parçalanır veya çatallanır. Durumun bu olduğunu varsayalım, ve a elemanı, kalanı $\overline{a}$ $x^2 - d$ polinomunun $\mathbb{F}_p$ deki bir köküne karşılık gelen bir tamsayı olsun. $(p, a+\delta)$ nın (p) yi bölen P asal ideali için bir latis tabanı olduğunu kanıtlayınız.

4. Bir önceki problemin sonucunu ve Bölüm 11, 10.25'deki yöntemi kullanarak, $\delta = \sqrt{-17}$ ve $\delta = \sqrt{-30}$ olmak üzere, $\mathbb{Q}[\delta]$ tamsayılar halkasının ideal sınıf grubunu belirleyiniz.

5. $\delta = \sqrt{-163}$ olsun. $\mathbb{Q}[\delta]$ tamsayılar halkasının tek türlü çarpanlarına ayrılma bölgesi olduğunu kanıtlayınız.