

MIT AçıkDersSistemi

<http://ocw.mit.edu>

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

Bu bilgilere atıfta bulunmak veya kullanım koşulları hakkında bilgi için <http://ocw.mit.edu/terms> web sitesini ziyaret ediniz.

Diferansiyel Denklemlerde Nümerik Çözümler

Runge-Kutta Yöntemi

Ernest Ngaruiya

15 Mayıs 2007

Özet

Bu makalede, lineer ve lineerleştirilmiş diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan Runge-Kutta yöntemini ele alacağız. Basit lineer diferansiyel denklemlerin çözümü için Runge-Kutta yönteminin temel yöntemlere göre neden daha ideal olduğunu ifade ederek başlayacağız. Daha sonra verilen basit diferansiyel denklemler için, yöntemin diferansiyel denklemin çözümünde kullandığı adımları, basit bir Runge-Kutta çözücü yazmak için kullandığımız Matlab kodunu ve kodun çıktılarını açıklayarak devam edeceğiz. Bu yöntemin diferansiyel denklem çözümlerinde iyi çalışmadığı durumları (tuzakları) ele alarak bitireceğiz.

1 Giriş

Her n 'inci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem, birinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemler sistemi olarak ifade edilebilir. Nümerik yöntemler geleneksel yöntemlerle çözülmesi kolay olmayan diferansiyel denklemlerin verimli şekilde analizinde kullanılabilir. Bir adi diferansiyel denklem, lineer sistem olarak ifade edildiğinde lineer cebirin herhangi bir yöntemi sisteme uygulanabilir. Runge-Kutta yöntemi, hesaplama için gereken kaynak kullanımı ve hassasiyet açısından Euler yöntemi ve geliştirilmiş Euler yönteminden çok daha üstün bir yöntemdir. Bu yöntemlerin hepsi sabit adım kullanırlar, ancak değişken adım kullanan (her koşul altında daha iyi sonuç vermesi gerekmeyen) başka yöntemler de vardır. Euler yöntemleri aslında basit Runge-Kutta yöntemleri olsa da, şimdilerde daha sık kullanılan dördüncü mertebeye Runge-Kutta yöntemine “Runge-Kutta Yöntemi” olarak atıfta bulunacağız.

2. Euler ve İyileştirilmiş Euler Yöntemleri

$[a, b]$ kapalı aralığında tek $y(x)$ çözümü olan

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_0$$

başlangıç değer problemi için, $y(x)$ 'in bu aralıkta sürekli ikinci türevi varsa, $h > 0$ adımını kullanan Euler yöntemiyle hesaplanan y_i yaklaşık değerleriyle, $y(x_i)$ gerçek değerleri arasında

$$|y_n - y(x_n)| \leq Ch$$

eşitsizliğini sağlayan bir C sabiti vardır. İyileştirilmiş Euler yöntemi için ise

$$|y_n - y(x_n)| \leq Ch^2$$

eşitsizliği sağlanır. Bu, hatanın Euler yönteminde h , iyileştirilmiş Euler yönteminde h^2 mertebesinde olduğunu gösterir. İspat, G. Birkhoff ve G.C. Rota'nın *Adi Diferansiyel Denklemler* kitabında bulunabilir. Öte yandan, Runge-Kutta yöntemi dördüncü mertebeden bir yöntemdir. (Runge-Kutta yöntemi daha yüksek mertebeler için düzenlenebilir). Euler yöntemi büyük yerel ve birikmiş hatalardan etkilenir. Geliştirilmiş Euler ve Runge-Kutta yöntemleri, tahmin edici-düzeltilici yöntemlerdir ve basit Euler yöntemine göre daha doğru sonuçlar verir.

3. Runge-Kutta Yöntemi

Bu yöntem, y çıktısında verilen gerçek bir değişim için Kalkülüsün temel teoremini kullanarak, değişimi

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_n+h} y'(x) dx$$

integral şeklinde yazabileceğimiz gerçeğine dayanır.

Ardından sayısal integrasyon için Simpson Kuralı kullanılırsa

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx \frac{h}{6} \left(y'(x_n) + 4y' \left(x_n + \frac{h}{2} \right) + y'(x_{n+1}) \right)$$

$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{h}{6} \left(y'(x_n) + 2y' \left(x_n + \frac{h}{2} \right) + 2y' \left(x_n + \frac{h}{2} \right) + y'(x_{n+1}) \right)$$

elde edilir.

Verilen bir adım sayısı için Simpson kuralını kullanarak yaklaşık çözümü veren bir algoritmayı uygulayan bir kod yazmak için Matlab kullandık. Kodu kullanarak, başlangıç değerleri verildiği sürece, her türlü n 'inci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemi çözmek mümkündür. Bunu birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklem(add) ile ikinci mertebeden

bir adi diferansiyel denklemin çözümlerini yaklaşık olarak bulmaya çalışarak gösterdik. Kod aşağıdadır:

```
function [T,X] = hrungekutta(t,x,t1,n,f)
T = t;
X = x';
h = (t1 - t)/n;
for i = 1:n;
    k1 = f(t,x);
    k2 = f(t + h/2, x + k1*h/2);
    k3 = f(t+h/2, x + k2*h/2);
    k4 = f(t+h, x + k3*h);
    x = x + h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
    t = t+h;
    T = [T;t];
    X = [X;x'];
end
```

Bu fonksiyon $f(t_{başlangıç}, [x_0; y_0], t_{son}, adımsayısı, @add)$ şeklindedir.

ADD leri fonksiyon olarak gerçekleştirdik. Böylelikle, fonksiyon herhangi bir ADD yi, lineer sistem şeklinde ifade edildiği ve başlangıç değerleri verildiği sürece, alabilir. Matlab'da bir fonksiyonu diğer fonksiyona girdi olarak verebilmek için fonksiyon isminin önüne @ işareti koymak gerektiğini belirtelim.

Diyelim ki, ddxeqnegx fonksiyonu, $x'' = -x$ add dir. Bu durumda, girdi olarak @ddxeqnegx yazacağız. *Çeviricinin notu:* ddxeqnegx fonksiyon ismi rastgele seçilmiş değildir: ddx: türev türev x yani x'' ; eq: eşit =; neg: negatif yani $-$; x : x dir.

Örnek. $[T, X] = hrungekutta(0, [0; 1], 5, 10, @ ddxeqnegx)$

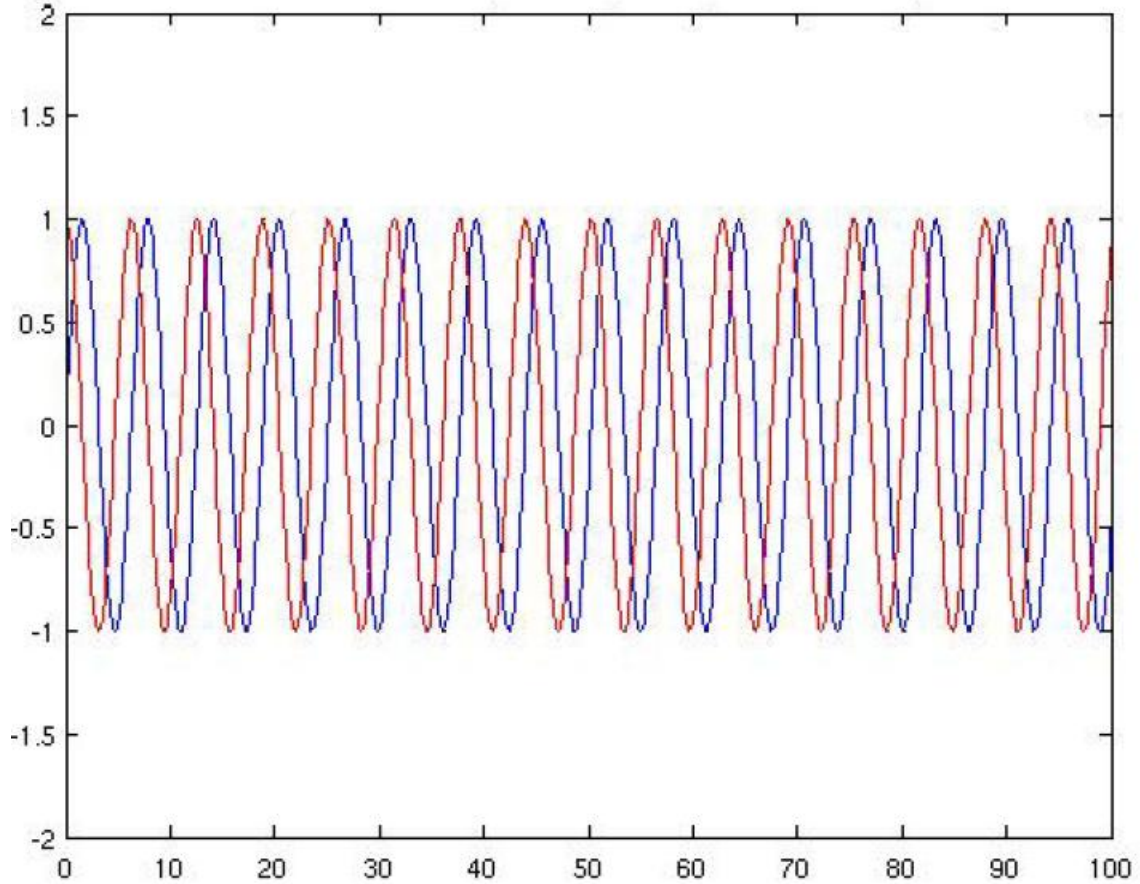
Bu, $t \in [0, 5]$ ve $x = 0, y = 1$ başlangıç değerleri için genel çözümü $[\sin t, \cos t]$ şeklinde olan $x'' = -x$ denklemini çözer. Çünkü, ikinci mertebeden add $x' = y, y' = x$ şeklinde birinci mertebeden bir add sistemine çevrilmiştir.

Diferansiyel denklem girdisi için kod

```
function X = ddxeqnegx(t,x)
X=x;
X(1) = x(2);
X(2) = -x(1);
```

dir. Çözümün grafiği aşağıda verilmiştir:

$x'' = x$ denklemini 1000 adımda çözerek elde edilen Cosine and Sine dalgaları



$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{1+x^2}, y(0) = 0$ probleminin çözümü için $[x, y] = \text{hrungekutta}(0, [0], 1, 10, @pidiff)$ kullandık. Problemin çözümünün $y = 4/\arctan x$ olduğunu belirtelim. Bu yüzden, $y_1 \approx \pi$ dir. 10 adım Runge-Kutta yöntemi için çıktılar aşağıdadır:

x	y
0	0
0.100	0.3987
0.200	0.7896
0.300	1.1658
0.400	1.5220

0.500	1.8546
0.600	2.1617
0.700	2.4429
0.800	2.6990
0.900	2.9313
1.000	3.1416

1000 adım ile, 3.141592653589791 elde ettik.

4. Runge-Kutta ve diğer nümerik yöntemlerin aksayan yönleri (tuzakları)

Runge-Kutta yönteminde karşılaşılan pek çok problem vardır. Burada ayrıntıya girmesek de, örnek bir denklemlerle karşılaşılabilecek bir problemi gösterelim.

$$\frac{dy}{dx} = 5y - 6e^{-x}$$

denklemini ele alalım. Denklemin genel çözümü

$$y = e^{-x} + Ce^{5x}$$

dir. $y(0) = 1$ başlangıç değeri ile $C = 0$ bulunur.

Çıktının (nümerik çözüm) hesaplamasında yapılan ufak bir hata sıfırdan farklı bir C değerinin ortaya çıkmasına neden olur. e nin üstü (kuvveti) büyük olduğu için, yapılacak (neredeyse önlenemez) küçük bir hata, çıktıda çok büyük bir hata meydana gelmesine neden olur.

Teşekkür

Bu makaleyi yazma konusunda büyük önerilerde bulunan ve beni, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerine ilgi duyan Lisa Danz, Marcelo Alvisio, Laura Evans ve Oleg Golberg ile aynı gruba koyan hocam Vera Hur'a teşekkür etmek isterim. Ayrıca, matematikteki bazı gerçekten güzel problemleri gösteren Josh-Nichols Barrer'e de teşekkür ederim.

Referanslar

[1] Birkhoff, Garrett and Rota, Gian-Carlo. Ordinary Differential Equations 4th ed. (John Wiley & Sons, New Jersey, 1989)

[2] Edwards, Henry and Penney, David. Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems 4th ed. (Prentice Hall, 1999)

[3] <http://en.wikipedia.org/wiki/Runge-kutta>