MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 9. AYIRMA VE KARŞILAŞTIRMA TEOREMLERİ

Çoğu örnek, iki fonksiyonun lineer bağımsız olup olmadığını belirlemekte, bu iki fonksiyonun Wronkskiyenlerini hesaplamanın iyi bir yol olduğu hissini destekler. Ancak iki fonksiyon, biri diğerinin bir katı ise lineer bağımlı, diğer durumda lineer bağımsızdır. Bunu Wronskiyeni hesaplamaksızın inceleyerek görmek oldukça kolaydır.

Bununla birlikte Wronskiyen kavramı, p ve q sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$y'' + p(t)y + q(t)y = 0 \tag{9.1}$$

denkleminin çözümlerinin özelliklerini bulmakta önemli bir uygulamaya sahiptir.

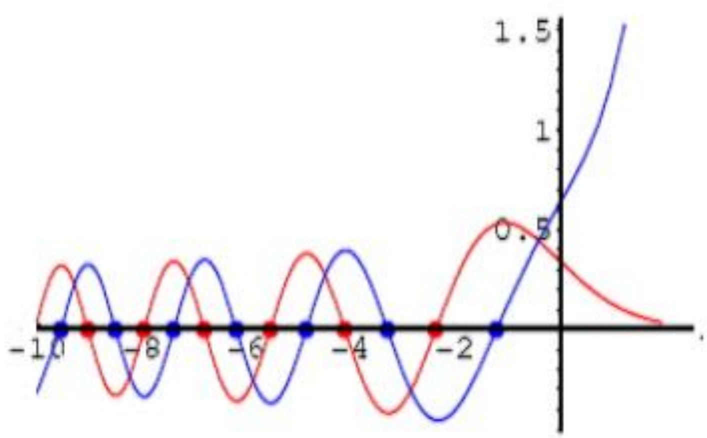
Ayırma ve karşılaştırma teoremleri. Motivasyon için

$$y'' - ty = 0, \quad t < 0 \tag{9.2}$$

Airy denklemini göz önüne alalım. Bu denklem, titreşim sayısının (frekans) t ye göre artması özelliği dışında

$$y'' + w^2 y = 0$$

basit harmonik hareket denklemine benzer. Daha açık olarak (9.2) deki $-t, w^2$ frekansının yerini almıştır. Buna göre $-t$ nin verilen bir değerinin yakınında, çözümlerin $\cos\sqrt{-t}\,t$ ve $\sin\sqrt{-t}\,t$ gibi davranmasını bekleriz. Elbette ki onlar (9.2) nin çözümleri değildir, ancak ne beklediğimiz konusunda bir ipucu verirler. Aslında, Airy kosinüs ve Airy sinüs olarak adlandırılan (9.2) nin normalize edilmiş çözüm çifti aşağıdaki şekildeki gibi davranır.



Şekil 9.1 Airy sinüs ve kosinüs fonksiyonları

Gerçekten, (9.1) denkleminin aşikar olmayan tüm çözümleri temelde aynı sayıda salınıma (ya da sıfırlara) sahiptir.

Teorem 9.1 (Sturm Ayırma Teoremi). *u ve v, (9.1) in lineer bağımsız iki çözümü ise, o zaman v nin ardışık iki sıfırı arasında u nun bir sıfırı vardır. Diğer bir deyişle u ve v, nin sıfırları ardışıktırlar.*

İspat. t_1 ve t_2 , v nin ardışık iki sıfırı olsun. Yani, $v(t_1) = v(t_2) = 0$ fakat (t_1, t_2) aralığında $v(t) \neq 0$ dir. u ve v, lineer bağımsız olduğundan, Wronskiyen $W(t) = W(u(t), v(t))$ asla sıfır değerini almaz. Her t için $W(t) > 0$ kabul edelim. $W(t) < 0$ benzerdir. O zaman

$$W(t_j) = u(t_j)v'(t_j), j = 1,2$$

dır.

t_1 ve t_2, v nin ardışık iki sıfırı olduğundan, $v'(t_1)$ ve $v'(t_2)$ zıt işaretli olmalıdır. Gerçekten, v, t_1 de artarken, t_2 de azalmalıdır. Bunun tersi de doğrudur. Buradan $u(t_1)$ ve $u(t_2)$ zıt işaretlidir. Ortalama değer teoreminden, u nun t_1 ve t_2 arasında bir sıfırı olmalıdır. Bu ispatı tamamlar. □

Yukarıdaki argümanın rafine bir hali daha yararlı bir sonuçta kullanılabilir.

Teorem 9.2 (Sturm Karşılaştırma Teoremi).

(9.3) $$u'' + p(t)u = 0 \text{ ve } v'' + q(t)v = 0$$

denklemleri verilsin. $p(t), q(t)$ sürekli ve $p(t) \geq q(t)$ olsun. $p(t) \equiv q(t)$ ve u, v nin sabit bir katı olmadıkça, v nin herhangi iki sıfırı arasında u nun en az bir sıfırı vardır.

İspat. v nin ardışık sıfırları t_1 ve t_2 olsun; $v(t_1) = v(t_2) = 0$ ve (t_1, t_2) aralığında $v(t) \neq 0$ dır. Her $t \in (t_1, t_2)$ için $u(t) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmaksızın $t \in (t_1, t_2)$ için u ve v pozitif olsun.

(9.4) $$W(u, v; t_1) = u(t_1)v'(t_1) \geq 0, W(u, v; t_2) = u(t_2)v'(t_2) \leq 0$$

elde ederiz.

Diğer yandan (t_1, t_2) aralığında $u, v > 0$ ve $p \geq q$ olduğundan ve (9.3) denklemi kullanılırsa

$$\frac{d}{dt} W(u, v; t) = uv'' - u''v = (p - q)uv \geq 0, \;\; t \in (t_1, t_2)$$

elde ederiz. $t \in (t_1, t_2)$ için $p(t) \equiv q(t)$ olmadığından yukarıdaki eşitsizlik $w(t)$ nin t nin artmayan fonksiyonu olduğunu gerektirir. Bu (9.4) ile çelişir. $t \in (t_1, t_2)$ için $p(t) \equiv q(t)$ durumunda c sabiti için $u(t) \equiv cv(t)$ dir. Bu ispatı tamamlar. □

Uygulamalar. $q(t) \leq 0$ olduğu zaman

(9.5) $$y'' + p(t)y = 0$$

denkleminin aşikar olmayan hiçbir çözümünün birden fazla sıfıra sahip olamayacağını gösterelim. Aksi halde, Sturm karşılaştırma teoreminden $y'' = 0$ diferansiyel denkleminin $v \equiv 1$ çözümü, (9.5) in herhangi bir aşikar olmayan çözümünün iki sıfırı arasında en az bir sıfıra sahip olurdu.

Benzer şekilde eğer $q(t) \geq k^2 > 0$ ise, $y'' + k^2 y = 0$ denkleminin $A\cos(kt - t_1)$ çözümünün, π/k uzunluklu herhangi bir aralıktaki, iki sıfırı arasında (9.5) denkleminin herhangi bir çözümünün bir sıfıra sahip olma zorunluluğu vardır.

n'inci mertebeden Bessel denklemi

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0$$

dir. $t > 0$ için denklem genellikle

$$y'' + \frac{1}{t} y' + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right) y = 0$$

normal biçiminde yazılır. $y = v/\sqrt{t}$ değişken değişimiyle, denklemi

(9.6) $$y'' + \left(1 - \frac{4n^2 - 1}{4t^2}\right) y = 0$$

yazarız. Belirtelim ki y sıfır olduğunda v de sıfırdır, ve bunun tersi de doğrudur.

Sturm karşılaştırma teoremini (9.2) ve $u'' + u = 0$ denklemlerine uygulayarak, $t > 0$ yarı sonsuz aralığı üzerindeki π uzunluklu her aralıkta, 0-ıncı mertebeden Bessel denkleminin herhangi bir çözümünün en az bir sıfırı olduğunu ve $n > 1/2$ olmak üzere, n- mertebeden Bessel denkleminin aşikar olmayan herhangi bir çözümünün en fazla bir sıfırı olduğunu söyleriz.

Sturm karşılaştırma teoremi kendine eşlenik denklemlere genişletilebilir.

Teorem 9.3 (Genişletilmiş Sturm Karşılaştırma Teoremi).

$$(p_1(t)u')' + q_1(t)u = 0 \quad ve \quad (p_2(t)v')' + q_2(t)v = 0$$

denklemleri verilsin. $p_1(t) \geq p_2(t)$ *ve* $q_2(t) \geq q_1(t)$ *olsun.* c *sabiti için* $u = cv$ *olmamak üzere, birinci denklemin aşikar olmayan herhangi bir* u *çözümünün iki sıfırı arasında ikinci denklemin herhangi bir reel çözümünün en az bir sıfırı yer alır.*

<u>Alıştırma.</u> $v = e^{\int p/2\, dt} y$ dönüşümüyle $(py')' + qy = 0$ denkleminin

$$v'' + \left(q(t) - \frac{p^2(t)}{4} - \frac{p'(t)}{2}\right)v = 0$$

denklemine dönüştüğünü gösteriniz.