

MIT AçıkDersSistemi

<http://ocw.mit.edu>

## 18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

Bu bilgilere atıfta bulunmak veya kullanım koşulları hakkında bilgi için <http://ocw.mit.edu/terms> web sitesini ziyaret ediniz.

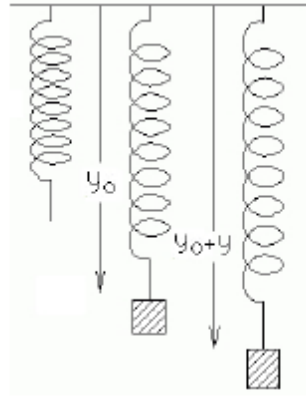
## DERS 7. MEKANİK SALINIM

**Kütle-yay sistemi ve elektrik devresi.** Bir  $m$  kütlesi asılı bir yayın ucuna bağlandığında bir uzama oluşur. Diyelim ki bu uzama  $y_0$  olsun. Hook yasasına göre,  $y_0$  yerçekimi kuvveti ile doğru orantılıdır. Yani,  $ky_0 = mg$  dir. Burada,  $k > 0$  yayın sertlik sabiti ve  $g$  yerçekimi ivmesidir. Eğer bir ek kuvvet uygulanır ve yay gerildikten sonra kuvvet kaldırılırsa, kütle-yay sistemi salınımına başlar. Problem yayın hareketini belirlemektir.

$y = y(t)$ , kütlenin  $y_0$  durağan durumundan yer değiştirmesi olsun. Kütleyle etkilenen kuvvetler, yerçekimi kuvveti ve uygulanan kuvvete ters yöndeki  $k(y + y_0)$  gerilme kuvvetidir. Buna göre,

$$F = mg - k(y + y_0) = -ky$$

olur.



Şekil 7.1. Yay-kütle sistemi

Newton'un ikinci yasasına göre, hareketin

$$my'' + ky = 0$$

diferansiyel denklemini elde ederiz.

Yayın hareketinin tanımlanmasında, sönmenin etkisini ve dış kuvveti de dikkate alırız. Eğer kütle, sönmenin  $y'$  hızıyla orantılı olduğu bir direnç ortamında ise ve uygulanan dış kuvvet  $f(t)$  ise, o zaman hareketin denklemi

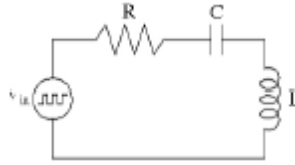
$$(7.1) \quad my'' + ry' + ky = f(t)$$

olur. Burada  $r > 0$  direnç sabitidir.

Şimdi bir RLC devresi ile kütle-yay sistemi arasındaki çarpıcı benzerliği keşfedelim. Bir elektromotor kuvvet kaynağı, bir direnç, bir bobin, ve bir kondansatör ile seri bağlı olsun. Kondansatör üzerindeki gerilimi  $v = v(t)$  ölçsün. Ohm yasasına göre, voltaj denklemi

$$(7.2) \quad Lv'' + Rv' + \frac{1}{c}y = \frac{1}{c}v_0(t)$$

olur. Burada  $L > 0$  öz indüksiyon,  $R > 0$  direnç,  $c > 0$  kapasitans,  $1/c > 0$  kapasitansın tersi, ve  $v_0(t)$  de kaynaktaki voltajdır.



Şekil 7.2. RLC devresi

(7.1) ve (7.2) nin her ikisi de ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer denklemdir. Bu denklemlerin analizi, bu dersin konusu olan faz gecikmesi/kazancı, çarpmalar ve rezonans kavramlarına yol açar.

**Serbest Salınımlar.** İlk olarak

$$(7.3) \quad my'' + ky = 0 \text{ ya da } y'' + w_0^2 y = 0$$

Dış kuvvetsiz ve sönümsüz salınım denklemini göz önüne alalım. Burada  $w_0^2 = \frac{m}{k} > 0$  doğal frekanstır.

Bir önceki dersten (7.3) ün genel çözümü,  $c_1$  ve  $c_2$  ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$y = c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t$$

ile verilir. Bu çözüm

$$y = A \cos(w_0 t - \phi)$$

olarak da yazılabilir, ve basit harmonik hareket olarak adlandırılan bir salınımlılık hareketini tanımlar. Burada,  $A \geq 0$  (veya  $|A|$ ) genlik ve  $\phi$  de faz gecikmesi (negatif faz) olarak adlandırılır. Hareket,  $2\pi/w_0$  periyotlu bir periyodik harekettir.

**Alıştırma** (Enerjinin Korunumu).  $v = y'$  olsun.

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 = E$$

nin (7.3) denkleminin çözümünü kapalı biçimde tanımladığını gösteriniz. Bu denklem *enerjinin korunumu* kanununu ifade eder;  $\frac{1}{2}mv^2$  hareket eden kütlenin kinetik enerjisini gösterir ( $v$  hızdır).  $\frac{1}{2}ky^2$  de, yayın  $y$  yerdeğiştirmesi kadar gerilmesi için gerekli olan

$$W = \int_0^y Fdy = \int_0^y kydy$$

işi yani kütlenin potansiyel enerjisini temsil etmektedir. Dış kuvvet ya da sönmenin olmaması durumunda potansiyel ve kinetik enerjinin toplamı olan toplam enerjinin zamana göre sabit olması beklenir. Bu örnek bu beklentiyi doğrular.

**Dış kuvvetli sönümsüz salınımlar.** Şimdi de

$$(7.4) \quad y'' + w_0^2 y = w_0^2 f(t), \quad w_0^2 > 0$$

dış kuvvetli sönümsüz salınım denklemini göz önüne alalım. Bu derste dış kuvvet olarak

$$(7.5) \quad f(t) = A \cos wt \quad \text{ya da} \quad f = B \sin wt$$

sinozoidal girişler alınmaktadır. Burada  $A, B$  ve  $w > 0$  reel sabitlerdir. Giriş fonksiyonları için seçimimiz, kural olarak sinozoidal olan bir alternatif akımın üreticinin çıkışının sinozoidal olmasıyla kısmen desteklenmektedir. Ancak, daha da önemlisi, bir keyfi periyodik giriş fonksiyonunun, Fourier serisi olarak adlandırılan trigonometrik polinomların toplamları

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi}{L} kt + b_k \sin \frac{2\pi}{L} kt \right)$$

ile yaklaşık olarak ifade edilmesidir.

Sistemin (7.5) teki özel giriş fonksiyonlarına nasıl tepki verdiğini bilirsek, Fourier analizi yardımıyla süperpozisyon kuralını da kullanarak keyfi periyodik giriş fonksiyonunu ele alabiliriz.

$w \neq w_0$  olsun. (7.5) te verilen  $f(t)$  fonksiyonu için, (7.4) denklemini için

$$y = a \cos wt \quad \text{ya da} \quad y = b \sin wt$$

deneme çözümü

$$a = \frac{w_0}{w_0^2 - w^2} A, \quad b = \frac{w_0}{w_0^2 - w^2} B$$

değerlerini verir.  $a/A$  veya  $b/B$  oranı sistemin kazancı olarak adlandırılır.  $w$ ,  $w_0$ 'a ne kadar yakın ise kazancın o kadar büyük olduğunu belirtelim.

*Çarpmalar (Beatings)*.  $w \neq w_0$  kabul ederek,

$$y'' + w_0^2 y = (w^2 - w_0^2) \cos wt$$

denklemini göz önüne alalım. Genel çözümü

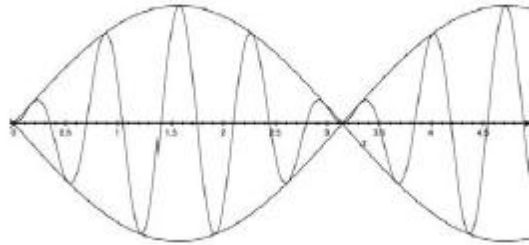
$$y = c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t - \cos wt$$

ile verilir.

Öngörölmüş  $y(0) = y'(0) = 0$  başlangıç koşullarına karşılık gelen durağan çözüm

$$y = \cos w_0 t - \cos wt = 2 \sin\left(\frac{w + w_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{w - w_0}{2} t\right)$$

dır. Eğer  $w$ ,  $w_0$ 'a yakınsa ve eğer her ikisi de büyük ise, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, ikinci çarpan birinci ile kıyaslandığında yavaş değişir.



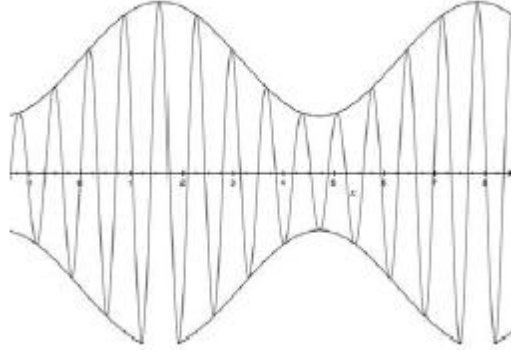
Şekil 7.3. Çarpmalar

Düşük frekans çarpanı  $\sin\left(\frac{w-w_0}{2} t\right)$ , bu anlamda,  $\sin\left(\frac{w+w_0}{2} t\right)$  yüksek frekans çarpanındaki genlik modülasyonunu tetikleyen çarpan olarak görülür. Böyle modüle edilen bir salınım çarpma denir.

Genel bir başlangıç verisi için

$$y(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{i(1+\epsilon)\omega t} = e^{i\omega t}(A + Be^{i\epsilon\omega t})$$

karmaşık üstel fonksiyonunu irdeleyelim. Bu fonksiyonun davranışı aşağıdaki şekilde çizilidir.



Şekil 7.4.  $A = 1, B = 0.5, \omega = 1, \epsilon = 0.1$

$|y(t)| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\epsilon\omega t)}$  fonksiyonu genlik modülasyonu gibi çalışır ve çarpma etkisini gösterir. Maksimum genlik  $t = 2k\pi/\epsilon\omega$  anında  $A + B$  dir. Bu durum, iki kurucu dalganın fazları birbirlerini takviye için sıralandığı zaman meydana gelir. Minimum genlik  $|A - B| (\neq 0)$  dir ve bu, iki dalga tamamen senkronize dışında olduklarında ve yıkıcı titreşime maruz kaldıklarında oluşur.

Çarpmaların müzik aletleri ve radar teknolojisi üzerine uygulamaları vardır. Eğer bir akortlu müzik aleti ve piyano teli hemen hemen aynı frekansta birlikte çalarsa, çarpmalar bizim notaların birbirinden ne kadar eşit uzaklıkta olduğunu söylememize olanak sağlar. Çarpmalar ne kadar yavaşsa tellerin uyumu o kadar yakın olur.

1902 yılında, teterodyne yöntemi ile göndericinin yüksek frekanslı sinyalinden sadece biraz farklı bir sinyal üreten alıcı bir devre keşfedildi. Fark duyulabilir uzaklıkta bir frekans üretmektedir. 1946 yılında, radar teknolojisinin bir yan ürünü olarak, güneşten bir santimetre mikrodalga radyasyon tespit etmek için heterodyne yöntemi (gelen sinyali devamlı bir frekansa karıştıran yöntem) kullanılmıştır. Bu deney radyo astronomi ve mikrodalga spektroskopisinde büyük bir adım olarak işaretlendi.

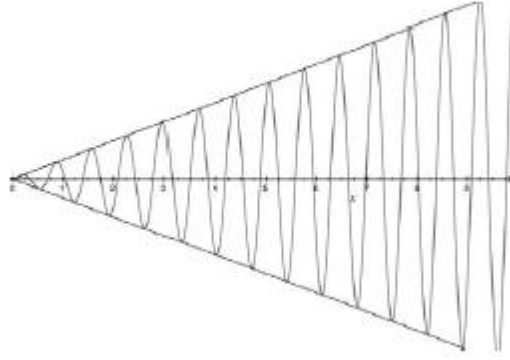
*Rezonans.*  $\omega = \omega_0$  olduğu zaman, sistem *rezonansa* maruz kalır.

$$y'' + \omega_0^2 y = \omega_0^2 A \cos \omega_0 t \quad \text{veya} \quad y'' + \omega_0^2 y = \omega_0^2 B \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 > 0$$

denklemlerini göz önüne alalım. Sırasıyla,

$$y = \frac{1}{2}Aw_0t \cos w_0t, \quad y = -\frac{1}{2}Bw_0t \cos w_0t$$

özel çözümlerdir.  $\frac{1}{2}Aw_0t$  ve  $\frac{1}{2}Bw_0t$  genlikleri  $t$  ile orantılıdır ve  $t \rightarrow \infty$  için sınırlı değildir. Aşağıdaki şekle bakınız.



Şekil 7.5. Rezonans.

Rezonans olgusu mühendislikte derin öneme sahiptir. Tacoma köprüsünün çöküşü bazı uzmanlar tarafından zorlanmış titreşimler temelinde açıklanmıştır.

Trompetler çaldığında insanlar bağırdı, ve trompetin çalışında insanlar yüksek bir sesle bağırdığında, duvar çöktü; böylece her erkek içeri girdi ve şehri aldılar. (Joshua 06:20)