MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

BÖLÜM 2: İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER

Değişken katsayılı diferansiyel denklemler için geçerli olan genel kurallar anlamında varlık ve tekliği tartışacağız. Wronskiyen tekniğini geliştireceğiz ve salınımlılık davranışını incelemek için uygulayacağız. Ek olarak yerel maksimum ve yerel minimumdaki koşullara bağlı kalitatif sonuçları vereceğiz ve ikinci mertebeden denklemlere uygulayacağız.

DERS 6. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER

En yoğun çalışılan adi diferansiyel denklemler ikinci mertebeden

$$p_0(t)y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = f(t) \tag{6.1}$$

biçimindeki lineer denklemlerdir. Burada $' = \frac{d}{dt}$, t değişkenine göre türevi göstermektedir, $p_j(t), j = 0,1,2$ ve $f(t)$, I aralığında sürekli fonksiyonlardır.

Uyarı 6.1. (Aykırı noktalar üzerine uyarı). Eğer $p_0(t)$ belli bir noktada sıfır oluyor ise, diyelim ki bu nokta t_0 olsun, (6.1) denklemi t_0 da aykırı noktaya sahiptir denir. Örneğin,

$$\left((1-t^2)y'\right)' + \lambda y = 0 \quad \text{ya da} \quad (1-t^2)y'' - 2t\,y' + \lambda y = 0$$

Legendre denklemi, $t = \pm 1$ de aykırı noktalara sahiptir. Denklemin $\lambda = n(n+1)$ için, Legendre polinomları olarak adlandırılan polinom çözümleri varken, diğer aşikar olmayan çözümler $t = 1$ veya $t = -1$ de bir aykırılığa sahip olurlar.

Bu derste aykırı noktaları incelemeyeceğiz.

Baz çözümler. Eğer I da $p_0(x) \neq 0$ ise (6.1) denklemi

(6.2) $$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$$

normal biçimine indirgenir. Burada, p, q ve f fonksiyonları I aralığında süreklidirler. Karşılık gelen

(6.3) $$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

homogen denklemi göz önüne alalım. Denklem lineer olduğundan superpozisyon ilkesi geçerlidir; eğer ϕ ve ψ (6.3) denkleminin çözümleri ise, c_1 ve c_2 sabitler olmak üzere, $c_1\phi + c_2\psi$ lineer kombinasyonu da (6.3) denkleminin çözümüdür.

Tanım 6.2. Verilen bir aralıkta, bir fonksiyon diğerinin belli bir katı ise, iki fonksiyona lineer bağımlı denir. Aksi halde, iki fonksiyona lineer bağımsız denir.

Örneğin, e^{-t} ve e^{-2t} fonksiyonları $t = 0$ da aynı değere sahip olmalarına rağmen, t nin her aralığında lineer bağımsızdırlar.

Eğer ϕ ve ψ, (6.3) denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise, o zaman (6.3) denkleminin her bir çözümü belirli $c_1$ve c_2 sabitleri için $c_1\phi + c_2\psi$ biçimindedir. Bu tip $\{\phi, \psi\}$ çözüm çiftine, (6.3) denkleminin bir bazı denir. Bir bazının varlığı, (6.3) için ve homogen lineer diferansiyel denklemlerin daha kapsamlı bir sınıfı için bir temel sonuçtur. Bu sonucu daha sonra ispatlayacağız.

Sabit katsayılı diferansiyel denklemler. p ve q sabit reel sayılar olmak üzere, ikinci mertebeden

(6.4) $$y'' + py' + qy = 0$$

homogen denklemin çözümlerinin bazını oluşturalım.

İşin özü (püf noktası), $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $y = e^{\lambda t}$ biçiminde çözüm aramaktır. Buna göre, $\left(e^{\lambda t}\right)' = \lambda e^{\lambda t}$ ve $\left(e^{\lambda t}\right)'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ olduğundan (6.4) ten

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$$

yazılır. $e^{\lambda t} \neq 0$ olduğundan, yukarıdaki eşitlikten $y = e^{\lambda t}$ nin (6.4) denkleminin çözümü olması, λ sayısının (6.4) denkleminin karakteristik polinomu olarak adlandırılan ikinci dereceden

(6.5) $$p(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$$

polinomunun bir kökü olması ile eşdeğer olduğu görülür. Karakteristik polinom

$$\frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \Delta = p^2 - 4q$$

şeklinde iki köke (katlı kökleri de sayarak) sahiptir. Tartışmayı Δ diskriminantının işareti ile tanımlı köklerin durumuna göre ayırıyoruz.

Eğer $\Delta > 0$ ise, her iki kök de reeldir ve

$$e^{\frac{-p+\sqrt{\Delta}}{2}t}, \qquad e^{\frac{-p-\sqrt{\Delta}}{2}t}$$

fonksiyonları, (6.4) denkleminin lineer bağımsız çözümleridir. Bu yüzden (6.4) ün çözümlerinin bir bazını oluştururlar.

Eğer $\Delta = 0$ ise, yöntem sadece

$$e^{-\frac{p}{2}t}$$

çözümünü verir. Lagrange tarafından önerilen yöntemi kullanarak, ikinci çözüm olarak $ve^{-\frac{p}{2}t}$ yi deneriz. Burada $v = v(t)$ dir. Yerine koyduğumuzda, (6.4)

$$(ve^{-\frac{p}{2}t})'' + p(ve^{-\frac{p}{2}t})' + qve^{-\frac{p}{2}t} = v''e^{-\frac{p}{2}t} = 0$$

olur. Buradan $v'' = 0$ olmalıdır ve dolayısıyla $y = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{p}{2}t}$ çözüm ailesini elde ederiz. $e^{-\frac{p}{2}t}$ ve $te^{-\frac{p}{2}t}$ lineer bağımsız olduklarından (6.4) denkleminin çözümleri için bir baz oluştururlar.

Eğer $\Delta < 0$ ise, her iki kökte karmaşıktır ve

$$e^{\frac{-p+i\sqrt{-\Delta}}{2}t}, \qquad e^{\frac{-p-i\sqrt{-\Delta}}{2}t}$$

fonksiyonları (6.4) denkleminin (karmaşık) çözümleridir. Bu durumda

$$e^{-\frac{p}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right), \qquad e^{-\frac{p}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)$$

fonksiyonlarının (6.4) denkleminin iki reel çözümü olduğu sonucunu çıkarırız. Fonksiyonlar lineer bağımsız olduklarından (6.4) denkleminin çözümleri için bir baz oluştururlar.

Reel kısımları eşitleme prensibi, daha genel olarak, değişken katsayılı denklemler için geçerlidir. $p(t)$ ve $q(t)$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere, $z(t) = x(t) + iy(t)$

$$z'' + p(t)z' + q(t)z = 0$$

denkleminin karmaşık bir çözümü ise, $x(t)$ ve $y(t)$ de denklemin çözümleridir.

Alıştırma. Reel kısımları eşitleme prensibini ispat ediniz.

Homogen olmayan denklemler ve başlangıç değer problemi. Bir sonraki adım olarak, genel bir $f(t)$ fonksiyonu içeren homogen olmayan (6.2) denklemine dönelim. Aşağıdaki sonuç, (6.2) denkleminin çözümler ailesini bir özel çözümden elde etmemize imkan vermektedir.

Tamamlayıcı Çözüm Prensibi. Eğer bir özel çözüm olarak adlandırılan y_p homogen olmayan (6.2) denkleminin bir çözümü ise, ve ϕ ve ψ de (6.3) homogen denkleminin çözümleri için bir baz oluşturuyorsa,

$$y = y_p + c_1\phi + c_2\psi$$

(6.2) denkleminin bir genel çözümüdür. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

İspat. y, (6.2) nin bir çözümü olsun. $y - y_p$, (6.3) homogen denklemini sağladığından, bu çözüm bazı $c_1$ve $c_2$sabitleri için $c_1\phi + c_2\psi$ biçiminde olmalıdır.

Örnek 6.3.

$$y'' + y = 3\sin 2t \tag{6.6}$$

denklemini göz önüne alalım. Özel çözüm için, A keyfi bir sabit olmak üzere, $y = A\sin 2t$ şeklinde bir çözüm deniyoruz. $y'' = -4A\sin 2t$ olduğundan, diferansiyel denklem

$$(-4A + A)\sin 2t = 3\sin 2t$$

olur. Böylece $A = -1$ ve $y_p = -\sin 2t$, (6.6) nın bir özel çözümüdür. Diğer taraftan, $\sin t$ ve $\cos t$ denkleme karşılık gelen $y'' + y = 0$ homogen denkleminin çözümleri için bir baz oluşturur. Bu yüzden, (6.6) denkleminin bir genel çözümü

$$y = -\sin 2t + c_1\sin t + c_2\cos t$$

ile verilir.

Polinom biçimindeki dış kuvvetler için özel çözümler benzer şekilde bulunur. Örnek olarak,

$$y'' + py' + qy = ct + d$$

denklemini göz önüne alalım. Burada p, q, c, d sabitlerdir. Önce $y_p = at + b$ tipinde bir özel çözüm arayalım. Denklemde yerine konulduğunda,

$$qa = c \ \text{ ve } pa + qb = 0$$

elde ederiz. $q = 0$ olmadıkça,

$$y_p = \frac{c}{q} + \frac{qd - pc}{q^2} t$$

özel çözümü bulunur. Eğer $q = 0$ fakat $p \neq 0$ ise bu durumda ikinci dereceden bir polinom tipinde özel çözüm ararız. Örneğin $y'' + y' = t$ denklemi $y_p = \frac{1}{2}t^2 - t$ özel çözümüne sahiptir. Son olarak $p = q = 0$ olduğu zaman, $y'' = ct + d$ denklemi $y_p = \frac{c}{6}t^3 + \frac{d}{2}t^2$ kübik polinom çözümüne sahiptir.

Özel çözümlerin bulunmasında kullanılan parametrelerin değişimi ve yok etme gibi diğer yöntemler genel sınıftan denklemler için daha sonra ele alınacaktır.

(6.2) denklemi bazen başlangıç ya da sınır koşulları ilave edilerek takviye edilir.

Örnek 6.4. (6.6) denklemini

$$y(0) = y'(0) = 0$$

başlangıç koşulları ile ele alarak, (6.2) için başlangıç değer problemini nasıl çözeceğimizi gözlemleyelim. Daha önce (6.6) denkleminin genel çözümünün

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \sin 2t$$

ile verildiğini gösterdik. Burada c_1 ve c_2 sabitlerdir. Böyle bir fonksiyonun $y(0) = 0$ koşulunu sağlayacak olması $c_1 = 0$ ile eşdeğerdir, bu durumda $y' = c_2 \cos t - 2\cos 2t$ olur. Özel olarak, $y'(0) = c_2 - 2$ dir. Böylece $y = -2\sin t - \sin 2t$ fonksiyonu verilen başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

Lineer diferansiyel denklemlere tarihsel giriş. Diferansiyel denklemlerin tarihi 17'nci yüzyılda Newton, Leibnitz ve Bernoulli'nin geometri ve mekanikteki problemlerde ortaya çıkan bazı birinci ve ikinci mertebeden basit denklemleri çözmesi ile başladı. Bu ilk keşifler geometrik ve fiziksel problemlere dayanan tüm diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kalkulüsun tanıdık temel fonksiyonları cinsinden yazılabileceğini tavsiye ediyor gibiydi. Bu nedenle ilk çalışmaların çoğu, diferansiyel denklemleri çözmek için kalkulüsun bilinen fonksiyonlarına sadece sonlu sayıda toplama, çıkarma, çarpma, bölme, komposizyon, ve integrasyon işlemi uygulayarak, ustaca teknikler geliştirmeye yönelikti.

Ancak, çok geçmeden göreceli olarak az sayıda diferansiyel denklemin elemanter yollarla çözülebileceği ortaya çıktı. Yavaş yavaş, matematikçiler tüm diferansiyel denklemleri çözmek için yöntemler keşfetmeyi denemenin umutsuz olduğunu fark etmeye başladılar. Bunun yerine, verilen bir diferansiyel denklemin çözümünün olup olmadığını, ne zaman olduğunu sormanın ve çözüm varsa çözümün özelliklerini diferansiyel denklemin kendisinden elde etmeyi denemenin daha verimli olduğunu gördüler. Bu çerçevede, matematikçiler fonksiyonlarının yeni kaynağının diferansiyel denklemler olduğunu düşünmeye başladılar.

1820 li yıllarda, Cauchy diferansiyel denklemler için ilk varlık teoremini elde etti. Cauchy, $y' = f(x, y)$ tipindeki her diferansiyel denklemin, $f(x, y)$ nin belirli genel koşulları sağladığı zaman, bir çözümü olduğunu ispat etti. Önemli bir örnek, p, q ve r verilen fonksiyonlar olmak üzere,

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

Ricatti denklemidir. Cauchy'nin çalışması Ricatti denkleminin orijin civarındaki herhangi $(-a, a)$ açık aralığında, p, q ve r nin $(-a, a)$ da kuvvet serilerine sahip olması durumunda, çözümünün varlığını gerektirmektedir. 1841 yılında, Josef Liouville bazı durumlarda bu çözümün elemanter fonksiyonlar vasıtasıyla elde edilemeyeceğini gösterdi.

Tecrübe, birkaç tip denklem dışında, diferansiyel denklemlerin çözümleri hakkında çok genel sonuçlar elde etmenin zor olduğunu göstermektedir. Bilimsel problemlerin çoğunda ortaya çıkan lineer diferansiyel denklemler olarak adlandırılan denklemler bunlar arasındadır. Biz bu denklemlere ilişkin başlıca sonuçları geliştireceğiz.