MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 4. DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLİR DENKLEMLER

Değişkenlerine ayrılabilir denklemler. Değişkenlerine ayrılabilir denklemler

(4.1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}$$

biçimindedir. Örneğin, $x+yy'=0$ ve $y'=y^2-1$ ayrılabilen denklemlerdir. (4.1) ayrılabilir denklemi

(4.2) $$f(x)dx=g(y)dy$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda, denklem biçimsel olarak (4.2) denkleminin her iki tarafının integralinin alınmasıyla çözülebilir.

(4.2) (ve böylece (4.1)) için lokal çözümlerin kesin teorisini ifade ve ispat edelim.

Teorem 4.1. *$f(x)$ ve $g(x)$, $R=\{(x,y): a<x<b,\ c<y<d\}$ bölgesinde sürekli olsun. Ayrıca R de herhangi bir noktada f ve g birlikte sıfır olmasın. Bu durumda (4.2) denklemi, $(x_0,y_0)\in R$ noktasından geçen bir tek çözüme sahiptir. Çözüm*

(4.3) $$\int_{x_0}^{x} f(x)dx=\int_{y_0}^{y} g(y)dy$$

ile verilir.

f ve g nin birlikte sıfır olmaması esastır. Örneğin, $xdx=-ydy$ denkleminin orijinden geçen bir çözümü yoktur.

İspat. Teoremin varsayımından $a<x<b$ için $f(x)\neq 0$ veya $c<y<d$ için $g(y)\neq 0$ dır. Genelliği bozmaksızın, $c<y<d$ için $g(y)>0$ kabul edelim.

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx\,,\quad G(y)=\int_{y_0}^{y} g(y)dy$$

olsun. Böylece (4.3) denklemi

(4.4) $$F(x)=G(y)$$

olur.

R de $G'(y) = g(y) > 0$ olduğundan, ters fonksiyon teoremine göre G^{-1} vardır ve (4.4) den, $y = G^{-1}(F(x))$ yazılabilir. Yani $\frac{dy}{dx}$ mevcuttur. (4.4) den türev alarak

$$F'(x) = G'(y)\frac{dy}{dx} \quad \text{veya} \quad f(x) = g(y)\frac{dy}{dx}$$

elde ederiz. Bu (4.2) denklemini gerektirir. Üstelik, (4.3), $x = x_0$ da $y = y_0$ başlangıç koşulunu verir.

Tekliği ispat etmek için: y, (4.2) denkleminin bir çözümü olsun ve z de aynı başlangıç koşulunu sağlayan başka bir çözüm olsun. Teoremin koşulları altında

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f(x)}{g(z)}$$

denklemi, herhangi $(x, y) \in R$ noktası için $\frac{dz}{dx}$ türevinin mevcut olmasını gerektirir.

$$u = G(y), \qquad v = G(z)$$

olsun. Buradan,

$$\frac{du}{dx} = G'(y)\frac{dy}{dx} = g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

dir. Benzer şekilde,

$$\frac{dv}{dx} = G'(z)\frac{dz}{dx} = g(z)\frac{dz}{dx} = f(x)$$

bulunur. u ve v aynı türeve sahip olduğundan, ikisinin farkı bir sabittir. Diğer taraftan x_0 daki başlangıç koşulu u ve v için aynıdır. Bu nedenle, R de $u = v$ dir. Bu ispatı tamamlar. □

Örnek 4.2.

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \qquad y(0) = 1 \tag{4.5}$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

Diferansiyel denklemi değişkenlerine ayırarak

$$\frac{dy}{1 + y^2} = dx$$

olarak yazarız. İntegral alıp hesaplarsak,

$$\arctan y = x + C, \qquad \arctan 1 = C$$

elde ederiz. Böylece (4.5) in (tek) çözümü $y = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ dir. Aynı sonuç, karşılık gelen limitler arasında

$$\int_1^y \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^x dx$$

integrallerinin alınmasıyla da elde edilir.

Dik yörüngeler. İki eğri ailesinden, bir ailedeki her eğri diğer ailedeki eğrileri 90 derece açıyla kesiyorsa bu iki eğri ailesine birbirinin dik yörüngeleri denir. Örneğin $x = c_1, y = c_2$ koordinat doğruları Kartezyen koordinat sisteminde bir dik yörüngeler sistemi oluşturur. Bir diğer örnek, kutupsal koordinat sisteminde

$$r = c_1, \theta = c_2$$

ile tanımlı çemberler ve orijinden geçen radyal doğrulardır.

(x, y)- düzleminde bir eğrinin (x, y) noktasındaki teğetinin x- ekseni ile yaptığı açının ϕ olduğunu varsayalım. Aynı (x, y) noktasındaki dik yörüngelerin x- ekseni ile yaptığı açı $\phi + \frac{\pi}{2}$ dir. Çunkü

$$\tan(\phi + \frac{\pi}{2}) = -\cot\phi = -\frac{1}{\tan\phi}$$

ve eğrinin eğimi $\frac{dy}{dx} = \tan\phi$ olduğundan, dik yörüngelerin denklemi elde etmek için diferansiyel denklemde $\frac{dy}{dx}$ ifadesini $-\frac{dx}{dy}$ ifadesi ile değiştirmemiz gerekir.

Örnek 4.3. y- eksenine teğet olan

$$x^2 + y^2 = cx \qquad (4.6)$$

çember ailesini göz önüne alalım.

(4.6) nın diferansiyeli alınır ve c yok edilirse (4.6) ailesinin sağladığı

$$x^2 + y^2 = 2x + 2xy\frac{dy}{dx} \text{ ya da } y^2 - x^2 = 2xy\frac{dy}{dx}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde $\frac{dy}{dx}$, $-\frac{dx}{dy}$ ile değiştirilirse, dik yörüngelerin diferansiyel denklemi

$$y^2 - x^2 = -2xy\frac{dx}{dy}$$

elde edilir. Denklemi diferansiyel formda

$$2xy\,dx - x^2dy + y^2dy = 0$$

olarak yazarız. $1/y^2$1 ile çarparsak

$$d\left(\frac{x^2}{y}\right) + dy = 0$$

bulunur, ve böylece $\frac{x^2}{y} + y = C$ elde edilir. İfadeyi x- eksenine teğet olan

$$x^2 + y^2 = Cy$$

bir çember ailesi biçiminde yazarız.

İşlemler $x \neq 0, y \neq 0$ ve $y^2 \neq x^2$ gerektirmesine rağmen, son ifade bu kısıtlamalar olmaksızın sağlanır.

$x^2 + y^2 = cx$ deki c niceliği, orijinal eğriler ailesindeki sabittir. Dik yörüngelerdeki sabit aynı değildir. Birinci adımda c nin yok edilmesi bu nedendendir.

<u>Alıştırma.</u> Geometrik olarak benzer ortak eksenli

$$x^2 + m\,y^2 = c, \qquad m > 0$$

elips ailesinin dik yörüngelerinin $y = \pm\,|x|^m$ ile verildiğini gösteriniz.

<u>Alıştırma.</u> Ayrılabilir herhangi bir $y' = f(x)g(y)$ denkleminin çözüm eğrilerinin, $y' = -1/f(x)g(y)$ ayrılabilir denklemin çözüm eğrilerinin dik yörüngeleri olduğunu gösteriniz.

---

1 Bu işlem denklemi tam diferansiyel denklem yapar ve çözüm kapalı olarak tanımlanır. $1/y^2$ ye integrasyon çarpanı denir. Tam diferansiyel denklemleri sistematik olarak daha sonra inceleyeceğiz.