MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 3. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER

Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler. Verilen bir I aralığında, birinci mertebeden

(3.1) $$y' + p(x)y = f(x)$$

diferansiyel denklemlerin (normal formda) çözümü için sistematik bir yöntem vereceğiz. Burada p ve f sürekli fonksiyonlardır.

Önce,

(3.2) $$y' + p(x)y = 0$$

homogen denklemi bir integral işlemi ile çözülür. $P(x) = \int p(x)dx$, $p(x)$ in belirsiz integrali olsun. Bu durumda, $e^{P(x)} \neq 0$ olduğundan,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{P(x)}y\right) = e^{P(x)}y' + p(x)e^{P(x)}y = e^{P(x)}(y' + p(x)y) = 0$$

ile (3.2) eşdeğerdir.

Teorem 3.1. *$p(x)$, I aralığında sürekli ve $P(x) = \int p(x)dx$, $p(x)$ in bir antitürevi olsun. Bu durumda, c bir sabit olmak üzere*

$$\phi(x) = ce^{-P(x)} = ce^{-\int p(x)dx}$$

(3.2) denkleminin bir çözümüdür. Tersine, (3.2) denkleminin her çözümü bu formdadır.

<u>Alıştırma.</u> $P(x)$ sürekli olsun. (3.2) denkleminin $y(x)$ çözümünün, tüm x ler için ya $y(x) = 0$ ya da $y(x) \neq 0$ olduğunu gösteriniz.

İkinci aşamada, homogen olmayan

(3.3) $$y' + p(x)y = f(x)$$

diferansiyel denklemini parametrelerin değişimi yöntemi ile ele alacağız. Önceki gibi $P(x) = \int p(x)dx$ olsun. Bu durumda

$$\frac{d}{dx}\left(e^{P(x)}y\right) = e^{P(x)}(y' + p(x)y) = e^{P(x)}f(x)$$

olur. Buradan, bir (x_0, y_0) için

$$ye^{P(x)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{P(s)}f(s)ds$$

elde edilir.

Teorem 3.2. $p(x)$ ve $f(x)$, *I aralığında sürekli $x_0 \in I$ olsun. Bu durumda*

$$y(x) = y_0e^{-P(x)} + e^{-P(x)}\int_{x_0}^{x} e^{P(s)}f(s)ds$$

(3.3) denkleminin bir çözümüdür. Üstelik, $y(x_0) = y_0$ ile $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(s)ds$ eşdeğerdir.

Örnek 3.3.

$$y' + y = x + 3 \tag{3.4}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. $y(x) = ax + b$ yi deneyen biri, (3.4) ün $y = x + 2$ çözümünü kolaylıkla bulur. Eğer $y = \phi(x)$, (3.4) ün başka bir çözümü ise, $z = y - (x + 2)$ karşılık gelen $z' + z = 0$ homogen denkleminin bir çözümü olmalıdır. Teorem 3.2 kullanılırsa, $z = ce^{-x}$ olur. Böylece, $y = ce^{-x} + x + 2$, (3.4) ün genel çözümüdür.

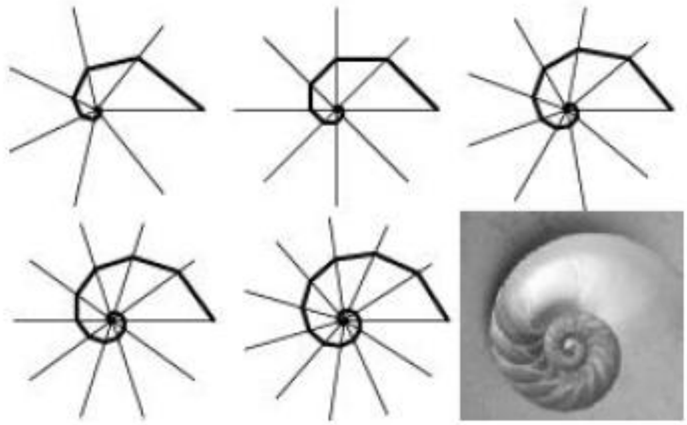
<u>Alıştırma (Bernoulli Tipi Denklemler).</u> Eğer $n \neq 0{,}1$ sabit bir sayı, p ve q sürekli fonksiyonlar ise

$$y' + p(x)y = q(x)y^n\,, \quad y > 0$$

Bernoulli denkleminin uygun m sabiti için $y = u^m$ dönüşümü ile bir lineer diferansiyel denkleme indirgenebileceğini gösteriniz. Burada $y > 0$ koşulu, $u = y^{1/m}$ nin anlamlı olmasını sağlar. $n = 0$ ve 1 durumunda denklemin kendisi zaten lineerdir.

<u>Alıştırma.</u> $y' + y = xy^3$, $y > 0$, diferansiyel denklemini çözünüz.

Logaritmik spiral. Kutupsal koordinatlarda bir $r = f(\theta)$ eğrisi aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi yarıçapı (ışınları) bir sabit açı, diyelim ki ψ açısı, altında kessin.



Şekil 3.1. Logaritmik spiral

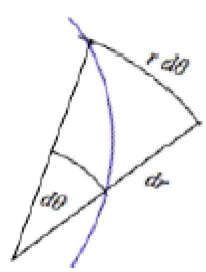
Problem (oyun) bu eğrinin denklemini bulmaktır. Eğer $\psi = 0$ ise eğri orijinden sonsuza yayılan bir ışındır, ve $r = f(\theta)$ formunda temsil edilemez. Eğer $\psi = \frac{\pi}{2}$ ya da $-\frac{\pi}{2}$ ise eğri merkezi orijinde bir çemberdir. Eğer

$$-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}, \quad \psi \neq 0 \tag{3.5}$$

ise $\tan\psi = \frac{1}{k}$ yazarız. Diferansiyel denklem

$$\tan\psi = \frac{rd\theta}{dr}$$

dir. (Bakınız Şekil 3.2).



Şekil 3.2.

$\tan\psi = \frac{1}{k}$ kullanarak,

(3.6) $$\frac{rd\theta}{dr} = \frac{1}{k}, \qquad \frac{dr}{d\theta} = kr$$

ve buradan $r = Ce^{k\theta}$ elde ederiz.

Bu çeşit bir eğri, bir logaritmik spiral adını alır. Yukarıdaki tartışmadaki adımlar tersine çevrilebilir ve bu nedenle $r = f(\theta)$ eğrisinin (3.5)'i sağlayan sabit bir ψ açıı altında yarıçapı kesmesi ile onun bir logaritmik spiral eğrisi olması eşdeğerdir. k keyfi olduğu için bu, üstel kanuna göre büyümeye uyan tüm süreçlerin bir geometrik yorumunu verir.

Bir logaritmik spiral, bir salyangoz kabuğuna benzer (Şekil 3.1). Bu bir rastlantı değildir. Bir salyangoz kabuğunun karakteristik özelliği, bir ucundan büyürken kabuğun yere basan kısmının değişmemesidir. Büyüme, birbirine dik, yarıçapsal ve enine, iki doğrultudaki oranlarıyla belirtilir. Her iki oranın t zamanda boyutla orantılı olduğunu kabul edelim. Boyutun tam olarak anlamı problem olmayacaktır ve kolaylık ölçülebilen büyüklük olarak W ağırlığını kullanacağız. Eğer radyal yöndeki yay uzunluğu s_1 ve enine yöndeki s_2 ise

(3.7) $$\frac{ds_1}{dt} = k_1 W, \qquad \frac{ds_2}{dt} = k_2 W$$

dir. Burada k_1 ve k_2 sabitlerdir. Kutupsal koordinatlarda yay uzunluğu

$$ds^2 = dr^2 + (rd\theta)^2$$

eşitliğini sağlar. $d\theta = 0$ koyarak $ds_1 = dr$ ve $dr = 0$ ile $ds_2 = rd\theta$ elde edilir. (3.7) deki birinci ve ikinci denklemden

$$r\frac{d\theta}{dr} = k_1/k_2$$

eşitliği bulunur. Bu $k = \frac{k_2}{k_1}$ olmak üzere (3.6) denklemiyle aynıdır.