MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 29. FAZ DÜZLEMLERİ I

Lineer veya lineer olmayan tipten $u'' = f(t, u, u')$ denklemler teorisinde $u(t)$ çoğu kez u ekseninde hareket eden bir noktanın t anındaki yerini ve $v(t) = u'(t)$ de t anındaki hızını tanımlar. $\big(u(t), v(t)\big)$ ikilisi, birlikte, sistemin t anındaki durumunu belirler.

Sistemin davranışı, (u, v)-düzleminde $\big(u(t), v(t)\big)$ noktasının geometrik yeri ile tarif edilebilir. Bu biçimde diferansiyel denklem ile ilişkilendirilen (u, v)-düzlemi *faz düzlemi* olarak adlandırılır. $\big(u(t), v(t)\big)$ parametrik çözüm eğrisine *yörünge* ve onun görüntüsüne de *orbit* veya *iz* denir. Bir yörünge ile orbit arasındaki fark, yörüngenin çözüm eğrisinin oryantasyonunu veren t parametresi ile donatılmış olmasıdır.

Bu derste ve daha sonra, ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin veya daha genel olarak iki boyutlu lineer diferansiyel denklemler sisteminin kalitatif davranışını faz düzlemindeki yörüngeleri çizerek inceleyeceğiz.

En basit durumda, p, q sabitler olmak üzere

(29.1)
$$u'' + pu' + qu = 0$$

denklemi için $u' = v, v' = -pu' - qu$ yazarız. Buradan, (u, v)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

denkleminin çözümü olur. Daha genel olarak,

(29.2)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

düzlem otonom lineer denklem sistemini göz önüne alalım.

Orijin $\big(x(t), y(t)\big) \equiv 0$ her zaman (29.2) sisteminin bir çözümüdür ve *kritik nokta*, sabit çözüm veya denge noktası olarak adlandırılır. Eğer A singüler değilse, yani $|A| \neq 0$ ise $(0,0)$ (29.2) nin tek kritik noktasıdır. $|A| = 0$ durumu dejenere durum olarak adlandırılır.

A matrisinin karakteristik polinomu

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = \lambda^2 + p\lambda + q$$

olsun. (29.2) nin eş denklemi (29.1), lineer düzlem otonom (29.2) sistemi ile ona ilişkin ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem arasında bir bağlantı kurmaktadır.

Eğer $t \to \infty$ için (29.2) sisteminin tüm çözümleri sıfıra gidiyorsa, (29.2) sistemine asimptotik karalı, eğer sınırlı kalıyorsa, (29.2) sistemine kararlı, diğer durumlarda kararsızdır denir.

Lineer denklik. Eğer singüler olmayan K matrisi için $B = KAK^{-1}$ ise, birinci mertebeden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = B\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

sistemlerine *lineer denk* denir.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\vec{u} = K\vec{x}$, ve $\vec{x} = K^{-1}\vec{u}$ yazlım. Bu durumda, K ile ilişkili baz değişimine göre, $\vec{x}' = A\vec{x}$ sistemi

$$\vec{u}' = K\vec{x}' = KA\vec{x} = (KAK^{-1})\vec{u}$$

sistemine dönüşür. Yani, lineer denk sistemler, A ve KAK^{-1} *benzer* matrisleri ile ilgilidir. Böylece, (29.2) lineer otonom sistemini, lineer denklik altında, basit bir standart kanonik biçime indirgeyebiliriz.

Teorem 29.1. $\Delta = (tr\ A)^2 - 4\,det\ A = 0$ *olmadıkça, (29.2) sisteminin bir başka sisteme denk olması için gerek ve yeter koşul her ikisinin de aynı eş denkleme sahip olmasıdır.*

Lemma 29.2. *Lineer denk sistemler aynı eş denkleme sahiptirler.*

İspat. İki denk sistem A ve B matrisleri ile tanımlanmış olsun diyelim ve $B = KAK^{-1}$ alalım. Hesaplarsak,

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= |B - \lambda I| = |KAK^{-1} - \lambda I| \\ &= |KAK^{-1} - K(\lambda I)K^{-1}| = |K(A - \lambda I)K^{-1}| = |K||A - \lambda I||K|^{-1} \\ &= p_A(\lambda) \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani onların eş denkleler aynı karakteristik polinoma sahiptir. □

Lemma 29.3. $p = -(a + d)$ *ve* $q = ad - bc$ *olmak üzere,* $a = d$ *ve* $b = c = 0$ *olmadıkca (29.2) sistemi*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

sistemine lineer denktir.

İspat. $b \neq 0$ ise $u = x$ ve $v = ax + by$, yani

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

dönüşümünü deniyoruz. Bu durumda

$$\begin{aligned} u' &= x' = ax + by = v \\ v' &= ax' + by' = av + b(cx + dy) \\ &= (a + d)v - (ad - bc)u \end{aligned}$$

olur. İkinci denklemde $u = x$ in $u'' + pu' + qu = 0$ eş denklemini sağladığı kullanıldı. Bu

$$KAK^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterir.

Eğer $c \neq 0$ ise, benzer şekilde $u = y, v = cx + dy$ dönüşümünü deniyoruz.

Son olarak, $a \neq d$ ve $b = c = 0$ ise $u = x + y, v = ax + by$ dönüşümünü deniyoruz.

$a = d$ ve $b = c = 0$ ender durumunda, (29.2) sistemi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sistemine indirgenir ve x ve y, $u'' - 2au' + a^2u = 0$ eş denklemini sağlar.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sistemi de aynı eş denkleme sahiptir fakat sistemler lineer denk değildir. □

Sınıflandırma. (29.2) nin davranışını incelemek için önceki kesimlerdeki sonuçları kullanıyoruz.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) =: \lambda^2 + p\lambda + q,$$

ve

$$\Delta = p^2 - 4q = (a - d)^2 + 4bc$$

olsun.

Odak noktalar. Eğer $\Delta < 0$ ise, $p(\lambda)$ iki farklı karmaşık köke sahiptir. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\beta \neq 0$ olmak üzere bu kökler $\alpha \pm i\beta$ olsun. Bu durumda aynı eş denkleme sahip

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

kanonik formunu seciyoruz. Çözümü kolay olan bu kanonik sistem

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t,\ v(t) = c_1 e^{\alpha t} \sin \beta t$$

çözümlerine sahiptir.

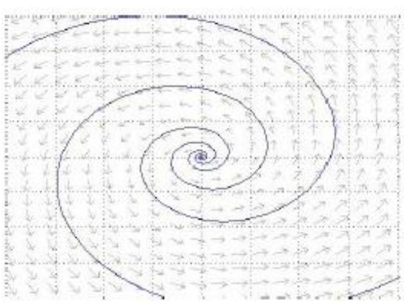
Kanonik sistemin çözümleri

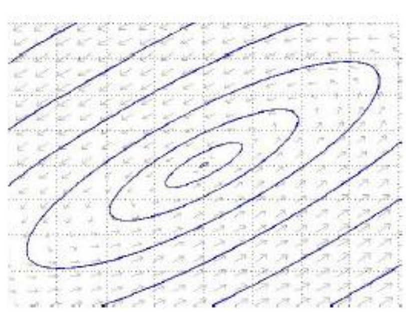
(29.3)
$$\left(\frac{u}{c_1}\right)^2 + \left(\frac{v}{c_1}\right)^2 = e^{2\alpha t}$$

denklemini sağlar. Eğer, ilaveten $\alpha \neq 0$ ise, $\big(u(t), v(t)\big)$ geometrik yeri bir spiral gösterir. Gerçekten, t, $\frac{2\pi}{\beta}$ arttığı zaman, (u, v) noktası başladığı aynı yarıçap doğrultusuna geri gelir, fakat üstel çarpan, orijine uzaklığın $e^{2\pi\alpha/\beta}$ ile çarımı olur. Bu tip kritik nokta *bir odak* noktası olarak adlandırılır.

$p = -2\alpha > 0$ olduğu zaman, $\big(u(t), v(t)\big)$ eğrisi orijine doğru sarmal oluşturur ve orijinin *kararlı odak* olduğunu söyleriz. $p < 0$ durumda, eğri orijinden uzaklaşır ve orijin bir *kararsız odak* noktasıdır.

Girdap (Vorteks) noktaları. Yukarıdaki durumda eğer $\alpha = 0$ veya ona denk $p = 0$ ve $\beta \neq 0$ ise, (29.3) den $\big(u(t), v(t)\big)$ nin geometrik yeri bir elipstir. Bu durumda orijine bir *girdap noktası* deriz. Bu takdirde her yörünge sınırlıdır ve buradan *orijin nötral* kararlıdır.





Şekil 29.1 Bir odak (sol) ve bir girdap (sağ)

Düğüm noktası. Eğer $\Delta > 0$ ve $q > 0$ ise, $p(\lambda)$ aynı işaretli farklı iki reel köke sahiptir. Bunlar, $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2|$ olacak şekilde λ_1 ve λ_2 olsun. Kanonik formu

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

biçiminde seçeriz. Kanonik sistemin çözümlerinin

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad v(t) = c_1 e^{\lambda_2 t}$$

olduğu doğrudan görülür.

Yukarıda, t yok edilirse

$$v = k u^m, \qquad m = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$$

elde ederiz; bu eğriler (u, v) düzleminde $v = ku^2$ parabollerine benzer. Bu durumda orijine bir *düğüm noktası* deriz.

Eğer $p > 0$, yani λ_1 ve λ_2 negatif ise düğüm noktası kararlı ve eğer $p < 0$ ise kararsızdır.

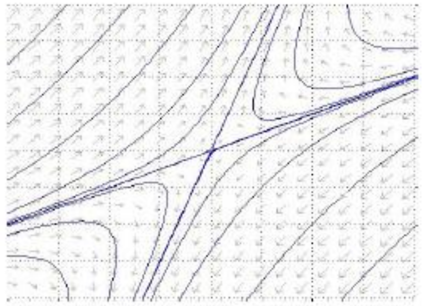
Eyer noktaları. Eğer $\Delta > 0$ ve $q < 0$ ise, $p(\lambda)$ farklı işaretli iki reel köke sahiptir. Bunlar $\lambda_1$ve λ_2 olsun. Düğüm durumunda olduğu gibi aynı

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

kanonik formu seçiyoruz. Bu durumda, çözümler

$$u^m v = k, \qquad m = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$$

eşitliğini sağlar. Bunlar $uv = k$ hiperbollerine benzer. Orijinin *eyer noktası* olduğunu söyleriz. Eyer noktası, çözüm eğrileri bir temel doğrultu boyunca orijinden uzaklaştığından, her zaman kararsızdır.



Şekil 29.3 Bir eyer

Örnek 29.4. Orijinin sırasıyla

$$x' = 6x + y \qquad\qquad x' = 6x + y$$
$$y' = 4x + 3y \qquad\qquad y' = 4x + 3y$$

sistemleri için kararsız düğüm ve eyer noktası olduğunu kontrol edelim. Karakteristik polinomlarının kökleri birincide $2, 7$ ve ikincide de $-2, 3$ dir. Böylece k bir sabit olamk üzere

$$x = ke^{2t} \qquad x = ke^{7t} \qquad ; \qquad x = ke^{-2t} \qquad x = ke^{3t}$$
$$y = -4x \qquad y = x \qquad\qquad 2y = x \qquad y = 3x$$

biçiminde yazılabilir.

Birinci durumda üstler pozitif olduğu için $|x|$ ve $|y|$, t ye göre artandır ve doğrular orjinden dışarı doğru yönlüdür. $t \to -\infty$ iken e^{2t} terimi e^{7t} den daha büyüktür ve orbitler orijinde $\lambda = 2$ ye ilişkin $y = -4x$ doğrusuna teğettir. $t \to \infty$ iken bu kez e^{7t} terimi e^{2t} den daha büyüktür ve orbitler farklı noktalarda $y = x$ e benzer davranırlar. Bakınız Şekil 29.2.

İkinci durumda $2y = x$ doğrusu -2 negatif üstü ile ilişkilidir ve orijine doğru yönlüdür, diğer doğrular ise orijinden dışa doğru yönlüdür. Bakınız Şekil 29.3.

Ek bilgi yörüngeleri daha kesin çizmeye yardım eder.