MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 28. TEKRARLANAN ÖZDEĞERLER VE ÜSTEL MATRİS

Tekrarlanan özdeğerler. Bir kez daha $n \times n$ boyutlu

(28.1) $$\vec{y}' = A(t)\vec{y}$$

sistemi ile başlıyoruz.

A nın bir λ_* özdeğerine, eğer $p_A(\lambda)$ nın katlı bir kökü ise *tekrarlanmış* deriz. Yani, $p_A(\lambda)$, $(\lambda - \lambda_*)^2$ ye bir çarpan olarak sahiptir. λ_*, $p_A(\lambda)$ nın iki katlı bir kökü olduğunu varsayalım. Prensipte λ_* özdeğerine karşılık (28.1) denkleminin iki lineer bağımsız çözümü karşılık gelir. Eğer $\vec{v}_*$ karşılık gelen bir özvektör ise, $\vec{y} = \vec{v}_* e^{\lambda_* t}$ bir çözümdür. Problem lineer bağımsız ikinci çözümü bulmaktır. Önce kolay durumu tartışalım.

Örnek 28.1 (Tam durum). Yine λ_* ın $p_A(\lambda)$ nın 2 katlı bir kökü olduğunu varsayalım. Eğer λ_* a karşılık, örneğin v_1, v_2 gibi lineer bağımsız vektörler varsa λ_* özdeğerine tamdır deriz. Bu özvektörleri kullanarak, (28.1) sisteminin iki lineer bağımsız çözümünü, isimlendirirsek,

$$\vec{y}_1 = \vec{v}_1 e^{\lambda_* t}, \quad \vec{y}_2 = \vec{v}_2 e^{\lambda_* t}$$

elde ederiz.

<u>Alıştırma.</u> A, 2×2 matris olsun. Eğer λ, A nın tekrarlanan tam özdeğeri ise A matrisinin $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ biçiminde olduğunu gösteriniz. Terside doğrudur.

Genel olarak, Eğer A matrisininin bir λ_* özdeğeri, tam olarak k kez tekrarlanıyor ise, yani $p_A(\lambda)$, $(\lambda - \lambda_*)^k$ çarpanına sahip ise, ve λ_* a karşılık k tane lineer bağımsız özvektör varsa, λ_* a tamdır denir. Bu durumda, bu özvektörler, (28.1) sisteminin k tane lineer bağımsız çözümünü üretir. Lineer cebirin önemli bir teoremi, reel ve simetrik bir kare matrisin tüm özdeğerlerinin reel ve tam olduğunu söyler.

Bununla birlikte, genel olarak, k (> 1) katlı bir özdeğer k dan daha az sayıda özvektöre sahiptir ve özdeğer tekniği ile genel çözümü oluşturamayız.

Üstel matris. $y' = ay, y(0) = 1$ probleminin $y = e^{at}$ çözümüne sahip olması motivasyon oluşturur. Genel bir A $n \times n$ matrisi için, $Y = e^{At}$, $Y' = AY, Y(0) = I$ probleminin çözümü olacak şekilde, e^{At} ifadesini tanımlamak ve de kolayca hesaplamak istiyoruz.

Bir a reel sayısı için $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \cdots + \frac{(at)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}$$

olduğunu hatırlayalım. Bir A $n \times n$ matrisi için de e^{At} üstel matrisini tanımlamanın doğal bir yolu

(28.2)
$$e^{At} = 1 + At + \frac{(tA)^2}{2!} + \cdots + \frac{(tA)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

seri açılımını kullanmaktır.

Yukarıdaki ifadenin anlamlı olması için önce matris normunu tanıtalım.

Tanım 28.2. Bir A $n \times n$ matrisi için matris normu

$$\|A\| = \sup_{\bar{y} \neq 0} \frac{|A\bar{y}|}{|\bar{y}|}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\vec{y}| = (\vec{y}^T \vec{y})^{1/2} = (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)^{1/2}$ ve $|A\vec{y}| = ((A\vec{y})^T (A\vec{y}))^{1/2}$ dir.

Alıştırma. Herhangi A ve B matrisleri ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \qquad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \qquad \|tA\| \leq |t|\|A\|$$

olduğunu gösteriniz.

Bir matris değerli $A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^{n}$ fonksiyonu için, $A(t) \to A(t_0)$ limiti

(i) her $1 \leq i, j \leq n$ durumunda $t \to t_0$ için $a_{ij}(t) \to a_{ij}(t_0)$ ve

(ii) $t \to t_0$ için $\|A(t) - A(t_0)\| \to 0$

olmasına denktir.

Matris normu altında (28.2) sonsuz serisi, her t ve her A için yakınsaktır ve *üstel matrisi* tanımlar.

Şimdi de (28.2) den terim terime türev alarak e^{At} nin türevini

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots\right)\\ &= A + tA + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}A^{n-1} + \cdots\\ &= Ae^{At}\end{aligned}$$

olarak hesaplarız. Üstelik, tanım gereği $e^{A0} = I$ olduğundan, e^{At} üstel matrisi

$$Y' = A(t)Y, \qquad Y(0) = I$$

probleminin bir çözümüdür.

Teorem 28.3. *$Y(t)$, A nın bir temel matrisi olsun. Bu durumda, $Y(t) = e^{At}Y(0)$ dır.*

A matrisinin bazı durumları için (28.2) deki sonsuz seri tam olarak toplanabilir.

<u>Alıştırma.</u> $\exp(\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}\right)$ olduğunu gösteriniz.

<u>Alıştırma.</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ise $e^{At} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğunu gösteriniz.

<u>Alıştırma.</u> $AB = BA$ ise,

(28.3) $$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$$

üstel kuralını ispat ediniz.

Örnek 28.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ alalım. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ve $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $A = B + C$ yazarız. $BC = CB$ olduğundan ve önceki alıştırmaların sonucundan

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur.

Temel matrisin bulunması. Genel olarak, e^{At} yi kapalı formda ifade etmek mümkün görünmemektedir. Bununla birlikte, e^{At} yi hesap edebileceğimiz n tane lineer bağımsız vektör bulabiliriz.

Buradaki mantık

$$e^{At}\vec{v} = e^{(A-\lambda I)t}e^{\lambda It}\vec{v} = e^{(A-\lambda I)t}e^{\lambda t}\vec{v}$$

yazmaktır. Eğer bir $m > 0$ tam sayısı için $(A-\lambda I)^m\vec{v} = 0$ ise, her $l \geq 0$ tam sayısı için $(A-\lambda I)^{m+l}\vec{v} = 0$ dır. Buradan

$$e^{(A-\lambda I)t}\vec{v} = \vec{v} + t(A-\lambda I)\vec{v} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda I)^{m-1}\vec{v}$$

bir sonlu toplamdır, ve e^{At} nin kendisi hesaplanmazsa bile

$$e^{At}\vec{v} = e^{\lambda t}\left(\vec{v} + t(A-\lambda I)\vec{v} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda I)^{m-1}\vec{v}\right)$$

tam olarak hesap edilebilir.

Örnek 28.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM. Karakteristik polinom $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(2-\lambda)$, iki katlı $\lambda = 1$ köküne ve $\lambda = 2$ basit köküne sahiptir.

Eğer $\lambda = 1$ ise,

$$(A-\lambda I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{v} = 0$$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ çözümüne sahiptir. Hatta bu, $\lambda = 1$ için lineer bağımsız tek özvektördür. (Gerçekten, lineer cebirde iyi bilinen bir sonuç, yukarıdaki lineer denklem sisteminin çözüm uzayının 1 boyutlu olduğunu söyler). $\vec{y}' = A\vec{y}$ sisteminin bir çözümü $\vec{y}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ elde edilir.

$\lambda = 1$ ile bağlantılı ikinci çözümü bulmak için,

$$(A - \lambda I)^2 \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

buluruz. Bu sistem $\vec{v}_1$ ile lineer bağımsız olan $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ çözümüne sahiptir. Diğer taraftan, $(A - \lambda I)\vec{v}_2 \neq 0$ dır. Böylece,

$$e^{At}\vec{v}_2 = e^t(\vec{v}_2 + t(A - I)\vec{v}_2) = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olur ve bu $\lambda = 1$ için $\vec{y}' = A\vec{y}$ sisteminin bir diğer çözümünü verir.

Son olarak, $\lambda = 2$ ise

$$(A - 2I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

sistemi $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ çözümüne sahiptir. Buradan $\vec{y}_3(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunur.

$\vec{y}' = A\vec{y}$ sisteminin genel çözümü

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t\, \vec{v}_1 + c_2 e^t\, \vec{v}_2 + c_3 e^{2t}\, \vec{v}_3$$

şeklinde yazılır. Bu çözüm, katlı köklerin olduğu skaler diferansiyel denklemlerin çözümleriyle benzerlik gösterir.

Dersimizi lineer cebirin aşağıdaki önemli teoremi ile tamamlayalım.

Teorem 28.6 (Cayley-Hamilton teoremi). *p, A nın karakteristik polinomu olmak üzere, A kare matrisi $p(A) = 0$ eşitliğini sağlar.*

İspat.

$$\text{adj}\,(A-\lambda I)\cdot(A-\lambda I)=p(\lambda)I$$

formülünü hatırlayalım. Bu ifadenin her iki yanı λ ya göre birer polinomdur. Bunlara matris polinomlar olarak bakabiliriz. λ yerine A matrisi yazılarak iddia ispat edilmiş olur. □