MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 27. KARMAŞIK ÇÖZÜMLER VE TEMEL MATRİS

Karmaşık özdeğerler. $A = (a_{ij})$, $n \times n$ boyutlu sabit bir matris olmak üzere

(27.1) $$\vec{y}' = A(t)\vec{y}$$

sistemini çalışmaya devam edelim. Bu kesim boyunca A reel matristir. A, bir karmaşık özdeğere sahip olduğu zaman, (27.1) in bir karmaşık çözümünü doğurur. Bu durumda, aşağıdaki *reel kısımları eşitleme kuralı*, bir karmaşık çözümden reel çözümler oluşturmamıza olanak verir.

Lemma 27.1. *$\vec{\alpha}(t)$ ve $\vec{\beta}(t)$ reel vektör değerli fonksiyonlar olmak üzere, $\vec{y}(t) = \vec{\alpha}(t) + i\vec{\beta}(t)$ fonksiyonu (27.1) sisteminin bir karmaşık çözümü ise, $\vec{\alpha}(t)$ ve $\vec{\beta}(t)$ fonksiyonları (27.1) sisteminin reel çözümleridir.*

İspat skaler denklemlerdekinin neredeyse aynısı olduğundan verilmeycektir.

Alıştırma. Eğer bir reel A matrisi $\vec{v}$ özvektörlü λ özdeğerine sahip ise, A nın aynı zamanda $\bar{\vec{v}}$ özvektörlü $\bar{\lambda}$ özdeğerine sahip olduğunu gösteriniz.

Örnek 27.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ matrisini çalışmaya devam edelim. A matrisi $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ ve $\lambda = 1 \pm 2i$ karmaşık özdeğerlere sahiptir.

$\lambda = 1 + 2i$ ise, $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix}$ matrisi $\binom{1}{2i}$ özvektörine sahiptir. Yukarıdaki alıştırma bu durumda $\binom{1}{-2i}$ vektörünün $\lambda = 1 - 2i$ özdeğerinin bir özvektörü olduğunu garanti eder.

(27.1) in reel çözümlerini bulmak için

$$e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

yazıyoruz. Yukarıdaki lemma $e^t\binom{\cos 2t}{-2\sin 2t}$ ve $e^t\binom{\sin 2t}{2\cos 2t}$ fonksiyonlarının (27.1) in reel çözümleri olduğunu söyler. Üstelik, bu çözümler lineer bağımsızdırlar. Bu yüzden, (27.1) denkleminin genel çözümü

$$c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

dir.

Temel matris. $T\vec{y} \coloneqq \vec{y}' - A\vec{y}$ lineer operatörü vektörlerden matrislere doğal bir genişlemeye sahiptir. Örneğin $n = 2$ durumunda

$$T\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

olsun. O zaman

$$T\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix}$$

olur. Genel olarak, eğer A, bir $n \times n$ matris ve $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, j'inci sütunu y_j olan bir $n \times n$ matris ise,

$$TY = T(y_1, y_2, \dots, y_n) = (Ty_1, Ty_2, \dots, Ty_n)$$

dir. Bu anlamda, $\vec{y}' = A\vec{y}$ vektör denklemi $Y' = AY$ matris denklemine genişler.

<u>Alıştırma.</u> U ve V, $n \times n$ matris değerli fonksiyonlar, C bif $n \times n$ matris ve $\vec{c}$ bir sütun vektör olmak üzere

$$T(U + V) = TU + TV, T(UC) = (TU)C, T(U\vec{c}) = (TU)\vec{c}$$

olduğunu gösteriniz.

Bu, T nin I aralığında türevlenebilen Y matris değerli fonksiyonlar sınıfı üzerinde tanımlı bir lineer operatör olması anlamındadır. Aşağıdaki varlık ve teklik sonucu standarttır.

Varlık ve Teklik. Eğer $A(t)$ ve $F(t)$, $t_0 \in I$ aralığında sürekli ve sınırlı (matris değerli) fonksiyonlar ise, bu durumda herhangi bir Y_0matrisi için

$$Y' = A(t)Y + F(t), \qquad Y(t_0) = Y_0$$

başlangıç değer probleminin $t \in I$ aralığında bir tek çözümü vardır.

Varsayım. $A(t), F(t)$, ve $\vec{f}(t)$, bir $t \in I$ aralığında her zaman sürekli ve sınırlıdır.

Tanım 27.3. $TY = 0$ denkleminin bir *temel matrisi*, bir t_0 noktasında $|U(t_0)| \neq 0$ özelliğe sahip bir $U(t)$ çözümüdür.

$|U(t_0)| \neq 0$ koşulunun, her $t \in I$ için $|U(t)| \neq 0$ olmasını gerektirdiğini belirtelim. Çözüm formüllerini elde etmek için bu gerçeği kullanıyoruz.

$U(t)$ nin bir uygulaması olarak

$$\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t), \qquad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

başlangıç değer problemi için çözüm formülünü bulalım. $U(t)$, $Y' = A(t)Y$ nin bir temel matrisi olsun. $\vec{f} = 0$ homogen durumunda, $\vec{c}$ keyfi bir sabit vektör olmak üzere, $\vec{y} = U(t)\vec{c}$ olsun. Bu durumda,

$$\vec{y}' = U'\vec{c} = (AU)\vec{c} = A(U\vec{c}) = A\vec{y}$$

olur, yani $\vec{y}$ homogen denklemin bir çözümüdür. Başlangıç koşulu $\vec{c}$ yi $\vec{c} = U^{-1}(t_0)\vec{y}_0$ olarak belirler.

Şimdi, genel $\vec{f}$ durumu için, $\vec{v}$ vektör değerli bir fonksiyon olmak üzere, $\vec{y} = U(t)\vec{v}$ biçiminde parametrelerin değişimini kullanıyoruz. Bu durumda,

$$\vec{y}' = (U\vec{v})' = U'\vec{v} + U\vec{v}' = (AU)\vec{v} + U\vec{v}' = A\vec{y} + U\vec{v}'$$

dir. Buradan, $U\vec{v}' = \vec{f}$ ve

$$\vec{y}(t) = U(t) \int U^{-1}(t)\,\vec{f}(t)dt$$

elde edilir.

Liouville denklemi. Wronskiyen için Abel özdeşliğini genelleştiren Liouville'in bir teoremini ispat edelim.

Teorem 27.4 (Liouville teoremi). *Eğer $t \in I$ için $Y'(t) = A(t)Y(t)$ ise,*

(27.2) $$|Y(t)|' = \operatorname{tr} A(t)\, |Y(t)|, \qquad t \in I$$

dır.

İspat. Bir $t_0 \in I$ noktasında $|Y(t_0)| = 0$ ise, her $t \in I$ için $|Y(t)| = 0$ olur ve ispat biter. Her $t \in I$ için $|Y(t)| \neq 0$ olduğunu varsayalım.

Bir t_0 noktasında $Y(t_0) = I$, bir başka ifadeyle,

$$Y(t_0) = \big(\vec{y}_1(t_0), \vec{y}_2(t_0), \dots \vec{y}_n(t_0)\big) = \big(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n\big)$$

olsun. Burada $\vec{E}_j$ $\mathbb{R}^n$ de birim koordinat vektördür, yani, $\vec{E}_j$, j'inci satırındaki elemanı 1 diğerleri 0 olan n boyutlu vektördür.

Determinant için

$$\begin{aligned} |Y(t)|' &= \frac{d}{dt}\det\big(\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)\big) \\ &= \det\big(\vec{y}_1{}'(t), \vec{y}_2(t) \dots, \vec{y}_n(t)\big) + \det\big(\vec{y}_1(t), \vec{y}_2'(t) \dots, \vec{y}_n(t)\big) + \cdots \\ &\quad + \det\big(\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t) \dots, \vec{y}_n'(t)\big) \end{aligned}$$

türev formülünü kullanalım. Bu formül, determinant için Laplace açılımını esas alır, burada ispatını yapmıyoruz. $A_j(t)$, $A(t)$ nin j yinci sütunu olmak üzere ,

$$Y_j'(t_0) = A(t_0)Y_j(t_0) = A(t_0)E_j = A_j(t_0)$$

olduğundan, yukarıdaki determinant formülünde $t = t_0$ alırsak,

$$\begin{aligned} &|Y(t_0)|' = \det(A_1(t_0), E_2, \dots, E_n) + \det(E_1, A_2(t_0), \dots, E_n) + \cdots \\ &+ \det\big(E_1, E_2, \dots, A_n(t_0)\big) \\ &= a_{11}(t_0) + a_{22}(t_0) + \cdots + a_{nn}(t_0) = \operatorname{tr} A(t_0) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (27.2), $t = t_0$ da sağlanır.

Genel olarak, $C = Y^{-1}(t_0)$ alalım. Bu durumda, $U(t) = Y(t)C$ matrisi

$$U' = A(t)U, \qquad U(t_0) = I$$

probleminin çözümüdür. Bu nedenle, yukarıdaki tartışmadan,

$$|U(t_0)|' = \operatorname{tr} A(t_0)|U(t_0)| = \operatorname{tr} A(t_0)$$

olur. $t = t_0$ da

$$\frac{d}{dt}(|Y(t)C|) = \frac{d}{dt}(|Y(t)|\,|C|) = |Y(t)|'|C|$$

olduğundan, tr $A(t_0) = |Y(t_0)|'|Y(t_0)|^{-1}$ elde edilir. t_0 keyfi olduğundan, ispat tamamlanmış olur. □