MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 26. ÖZDEĞERLER VE ÖZVEKTÖRLER

$A = (a_{ij}),\ n \times n$ boyutlu sabit bir matris olmak üzere

(26.1) $$\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}$$

sistemini inceliyoruz.

$n = 1$ durumunda yukarıdaki sistem $y' = ay$ skaler denklemine indirgenir ve ce^{at} biçiminde çözümlere sahiptir. $n \geq 2$ için benzer şekilde, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\vec{v}e^{\lambda t}$ biçiminde çözümler deneyelim. Bu durumda, (26.1) den

$$\lambda\vec{v}e^{\lambda t} = A\vec{v}e^{\lambda t}$$

olur. Daha sonra

(26.2) $$A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}, \qquad (A - \lambda I)\vec{v} = 0,$$

elde edilir.

(26.1) in $\vec{v}e^{\lambda t}$ biçiminde bir çözümünü bulmak için (26.2) yi sağlayan $\lambda \in \mathbb{C}$ ve sıfırdan farklı bir $\vec{v}$ vektörü bulmak isteriz. Bu bizi lineer cebirde aşağıdaki kullanışlı kavramlara götürür.

Tanım 26.1. (26.2) denklemini sağlayan sıfırdan farklı $\vec{v}$ vektörüne $\lambda \in \mathbb{C}$ *özdeğerlerine* karşı gelen bir *özvektörü* denir.

(26.2) nin $\vec{v}$ ye göre bir lineer sistem olduğunu hatırlayalım. (26.2) nin aşikar olamayan $\vec{v}$ çözümüne sahip olması için gerek ve yeter koşulunun $A - \lambda I$ matrisinin singüler olması gerçeği lineer cebirden iyi bilinen bir sonuçtur. Yani, $p_A(\lambda)$, A nın karakteristik polinomu olmak üzere $p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ dır. Bu durumda, bu tip $\vec{v}$ aşikar olamayan çözümü bir özvektördür ve $p_A(\lambda) = 0$ ın karşılık gelen kökü özdeğerdir.

Düzlem sistemler. 2×2 boyutlu bir $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matrisi için karakteristik polinom

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$$

dir. Bu karakteristik polinom λ_1 ve λ_2 (farklı olmaları gerekmez) gibi iki köke sahiptir. $\vec{v}_1$ ve $\vec{v}_2$, sırasıyla, λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşı gelen özvektörler olsun. Tanımdan, $\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ ve $\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$ (26.1) in çözümleridir.

Eğer $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ise, $\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ ve $\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$ fonksiyonları lineer bağımsızdır. Bu nedenle, (26.1) in çözümlerinin bir bazını oluşturur. (26.1) in genel çözümü, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$\vec{y} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

olarak verilir. Bu, (26.1) denkleminin incelenmesinde özdeğerlerin bir kullanımını gösterir.

2×2 boyutlu

$$V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \text{ ve } \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

matrislerini tanımlayalım. $AV = V\Lambda$ olduğu doğrulanabilir. Eğer $\vec{v}_1$ ve $\vec{v}_2$ lineer bağımsız, dolayısıyla $|V| \neq 0$, ise

$$\vec{x} = V^{-1} \vec{y}$$

değişken (regüler) dönüşümü yapabiliriz. Buradan, (26.1) denklemi

$\vec{x}' = \Lambda \vec{x}$ ye, açık ifadesiyle

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda_1 x_1 \\ x_2' &= \lambda_2 x_2 \end{aligned}$$

sistemine dönüşür. Yani, $\vec{x}$ ayrıştırılmış bir sistemi çözer. Bu sistemin çözümü kolaydır ve $x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $x_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$ dir. $\vec{x}$ yeni değişkenlerine *kanonik değişkenler,* ve $\Lambda = V^{-1} A V$ ye *köşegenleştirme* denir. Bu özdeğerlerin diğer bir kullanımıdır. Kanonik değişkenler, mühendislikte, mekanikte ve aslında sabit katsayılı lineer sistemlerin kullanımının yoğun olduğu tüm alanlarda ana rol oynar.

Lemma 26.2. *Bir 2×2 boyutlu matrisin özdeğerleri farklı ise karşılık gelen özvektörler lineer bağımsızdır.*

İspat. Özdeğerler $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olsun. Özvektörler

(26.3) $$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 = \bar{0}$$

eşitliği sağlansın. $c_1 = c_2 = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. (26.3)'e A matrisi uygularsak,

(26.4) $$c_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2 \vec{v}_2 = \bar{0}$$

elde ederiz. Çıkarma işlemi yapılırsa

$$c_1(\lambda_2-\lambda_1)\vec{v}_1=\bar{0}$$

elde edilir. Bu $c_1=0$ olmasını gerektirir. Bu durumda (26.3), $c_2=0$ verir. □

Örnek 26.3. $A=\begin{pmatrix}12 & 5\\ -6 & 1\end{pmatrix}$ matrisini göz önüne alalım. Kararkteristik polinom $p(\lambda)=\lambda^2-13\lambda+42=(\lambda-6)(\lambda-7)$ dir ve A matrisi $\lambda_1=6$ ve $\lambda_2=7$ özdeğerlerine sahiptir.

Eğer $\lambda_1=6$ ise $A-6I=\begin{pmatrix}6 & 5\\ -6 & -5\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}5\\ -6\end{pmatrix}$ bir özvektördür.

Eğer $\lambda_2=7$ ise $A-7I=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -6 & -6\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ bir özvektördür. (26.1) sisteminin genel çözümü, böylece,

$$\vec{y}=c_1e^{6t}\begin{pmatrix}5\\ -6\end{pmatrix}+c_2e^{7t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

olur. Kanonik değişken

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -6 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y_1-y_2\\ 6y_1+5y_2\end{pmatrix}$$

dir.

Alıştırma. $A=\begin{pmatrix}6 & 1\\ -1 & 8\end{pmatrix}$ matrisinin sadece bir $\lambda=7$ özdeğerine ve karşılık gelen $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ özvektörüne sahip olduğunu gösteriniz. Bu durumda, (26.1) in genel çözümünü buradan oluşturamayız.

Alıştırma. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & 1\end{pmatrix}$ matrisinin $\lambda=1\pm 2i$ özdeğerlerine ve sırasıyla karşılık gelen $\begin{pmatrix}1\\ \pm 2i\end{pmatrix}$ özvektörlerine sahip olduğunu gösteriniz. Bu özvektörler, (26.1) sisteminin

$$c_1e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix}1\\ 2i\end{pmatrix}+c_2e^{(1-2i)t}\begin{pmatrix}1\\ -2i\end{pmatrix}$$

genel (karmaşık) çözümünü verir.

Yüksek boyutlu sistemler. $n \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere, A $n \times n$ boyutlu bir matris ise, λ ya göre n'inci dereceden

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$$

karakteristik polinomu, birbirinden farklı olması gerekmeyen, n tane köke sahiptir. Bu, A nın birbirinden farklı olması gerekmeyen n tane $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ özdeğere sahip olduğunu ifade eder. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler ve

$$V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) \text{ ve } \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

olsun. Tanımdan, $\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \vec{v}_n e^{\lambda_n t}$ fonksiyonları (26.1) in çözümleridir.

Eğer $|V| \neq 0$ ise, yani $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ lineer bağımsız ise, çözümler (26.1) in çözümlerinin bir bazını oluşturur. Üstelik, $\vec{x} = V^{-1}\vec{y}$ bir kanonik değişkendir ve $\vec{x}' = \Lambda\vec{x}$ dır. Pek çok durumda $\vec{v}_j$ vektörleri $\lambda_j$ler farklı olmazsa bile, lineer bağımsız seçilebilirler. Bazen, $|V| \neq 0$ koşulu aşağıdaki sonuçtan ötürü sağlanır.

Lemma 26.4. *$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ özdeğerleri farklı ise karşılık gelen $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ özvektörleri lineer bağımsızdır.*

İspat. Aksini kabul edelim. $m > 1$ minimum sayıdaki lineer bağımlı vektörlerin sayısı olsun. Genelliği bozmaksızın $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ özvektörlerinin lineer bağımlı olduğunu, yani bazı sıfırdan farklı c_j ler için

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_m\vec{v}_m = 0 \tag{26.5}$$

eşitliğinin sağlandığını varsayalım. $c_2 \neq 0$ olduğunu da kabul edelim.

Lemma 26.2 ye benzer bir yol izliyoruz. A matrisini (26.5)'e uygularsak,

$$c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + c_m\lambda_m\vec{v}_m = 0$$

elde ederiz. (26.5), λ_1 ile çarpılırsa

$$c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_1\vec{v}_2 + \cdots + c_m\lambda_1\vec{v}_m = 0$$

olur. Çıkarma işlemi yapılırsa

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{v}_2 + \cdots + c_m(\lambda_m - \lambda_1)\vec{v}_m = 0$$

olur. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ özvektörleri lineer bağımsız olduğundan, $c_2 = c_3 = \cdots = c_m = 0$ olmalıdır. Bu çelişki iddiayı ispatlar. □

$A = A^T$ ise, karesel A matrisine *simetrik* denildiğini hatırlayalım. Eğer bir karmaşık A matrisi için A^*, A nın eşleniğinin devriği olmak üzere, $A = A^*$ ise A matrisine *Hermityen matris* denir. Bir simetrik veya Hermityen matris, özdeğerler yoluyla (26.1) in incelenmesinde çok önemli özelliklere sahiptir.

(1) Bir simetrik matrisin tüm özdeğerleri reeldir ve farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ortogonaldir.

İspat. $\vec{u}, \vec{v} \neq 0$ ve $\lambda \neq \mu$ olmak üzere

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \quad \text{ve} \quad A\vec{v} = \mu\vec{v}$$

olsun. Bu durumda,

$$\vec{u}^T A\vec{u} = \lambda\vec{u}^T\vec{u}, \qquad \vec{u}^T A^T\vec{u} = \bar{\lambda}\,\vec{u}^T\vec{u}$$

olur. $A = A^T$ olduğundan, $\lambda = \bar{\lambda}$ elde edilir. İkinci iddia ödev olarak bırakılmıştır.

(2) A matrisi n tane lineer bağımsız özvektöre sahiptir (özdeğerlerin katından bağımsız).

(1) ve (2) nin hemen bir sonucu aşağıdakidir:

(3) Özdeğerler basit (tek katlı) ise, karşılık gelen özvektörler ortogonaldir.

□