MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

BÖLÜM VI: LINEER SİSTEMLER

Birinci mertebeden n tane lineer diferansiyel denklemden oluşan denklem sistemlerini inceleyeceğiz. Bu sistemler, birinci mertebeden matris diferansiyel denklemlerle ilişkilidir. Karşılık gelen matris sabit olduğunda, matrisin özdeğerleri ve özfonksiyonları genel çözümü oluşturmak için kullanışlı bir yapı sağlar. Temel (çözümler) matrisi üstel matris olarak inşa edilecektir.

DERS 25. LİNEER SİSTEMLER

Bir lineer sistem, n bilinmeyenli n diferansiyel denklemden oluşan

(25.1)
$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(t)y_1 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t) \\ y_2' &= a_{21}(t)y_1 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t) \end{aligned}$$

sistemidir. Burada, $' = \frac{d}{dt}$ dir. Matris notasyonu ile, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, $t \in I$ aralığında tanımlı $\mathbb{R}^n$ değerli fonksiyonlar ve $A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^{n}$, I aralığında tanımlı $n \times n$ matris değerli fonksiyon olmak üzere, (25.1) sistemi

(25.2)
$$\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t)$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer matris değerli bir $A(t) = \left(a_{ij(t)}\right)$ fonksiyonunun her $a_{ij}(t)$ elemanı sürekli, sınırlı ve türevlenebilir ise, $A(t)$ matrisine sırasıyla sürekli, sınırlı ve türevlenebilir denir. Türev ve integral elemanlar yoluyla,

$$\frac{d}{dt}A(t) = \left(\frac{da_{ij(t)}}{dt}\right) \text{ ve } \int A(t)dt = \left(\int a_{ij(t)}dt\right)$$

şeklinde tanımlıdır.

(25.3) $$L\,\vec{y} = \vec{y}' - A(t)\vec{y}$$

operatörünü tanımlayalım. Bu notasyon ile, (25.2) sistemi $L\vec{y} = \vec{f}(t)$ olarak yazılabilir. L operatörünün tanım bölgesi bir I aralığında türevlenebilir n boyutlu vektör değerli fonksiyonlar uzayıdır.

Alıştırma. L nin bir lineer operatör olduğunu gösteriniz. Yani,

$$L\big(c_1\vec{y}_1(t) + c_2\vec{y}_2(t)\big) = c_1L\,\vec{y}_1(t) + c_2L\vec{y}_2(t)$$

sağlanır.

L lineer olduğundan süperposizyonun temel kuralı, tamamlayıcı fonksiyon prensibi ve lineer operatörler için diğer sonuçlar geçerlidir.

Varlık ve teklik. Eğer $A(t)$ ve $\vec{f}(t)$, t_0 noktasını içeren bir I aralığında sürekli ve sınırlı ise, her bir $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t), \qquad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

başlangıç değer probleminin I aralığında bir tek çözüme sahiptir.

Varsayım. Ders boyunca ve sonrasında $A(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonlarının bir I aralığında sürekli olduğu varsayılmaktadır.

Lineer bağımsızlık. $\mathbb{R}^n$deki $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n$ vektörleri için, eğer

$$c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2 + \cdots + c_n\vec{y}_n = 0$$

eşitliği sadece $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ durumunda sağlanıyorsa, $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir.

$Y = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$, j'inci sütunu $\vec{y}_j$ olan bir $n \times n$ matris olsun. Bu durumda $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ vektörlerinin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul determinant $|Y| \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda, bu fonksiyonlar $\mathbb{R}^n$ lineer uzayı için bir baz oluşturur.

Benzer şekilde, $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ vektör değerli fonksiyonları için, eğer

$$c_1\vec{y}_1(t) + c_2\vec{y}_2(t) + \cdots + c_n\vec{y}_n(t) = 0, \qquad \forall t \in I$$

eşitliği sadece $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ durumunda sağlanıyorsa, $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ fonksiyonlarına I aralığında lineer bağımsızdır denir. Bu tanım vektörler için olan tanımdan daha kısıtlayıcıdır. Fakat eğer bu fonksiyonlar bir diferansiyel denklemin çözümleri ise lineer bağımsızlık, vektörlerdekine paralel biçimde matris değerli bir fonksiyonun determinantı cinsinden karakterize edilebilir.

$A(t)$, bir I aralığında sürekli $n \times n$ matris değerli bir fonksiyon olmak üzere

(25.4) $$\vec{y}' = A(t)\vec{y}$$

sisteminin çözümlerinin bir bazı, n tane $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ çözümün bir koleksiyonudur ve her $\vec{y}(t)$ çözümü, $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitler olmak üzere, onların bir

$$\vec{y}(t) = c_1\vec{y}_1(t) + c_2\vec{y}_2(t) + \cdots + c_n\vec{y}_n(t)$$

lineer bileşimi olarak tek şekilde yazılabilir.

Teorem 25.1. $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ *vektör fonksiyonları (25.4) denkleminin I aralığında tanımlı n tane çözümü olsun.* $Y = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$, j'inci *sütunu* $\vec{y}_j$ *olan bir $n \times n$ matris değerli fonksiyon olsun.*

Bu fonksiyonların, çözümlerin bir bazını oluşturması için gerek ve yeter koşul, bir $t_0 \in I$ noktasında $|Y(t_0)| \neq 0$ olmasıdır. Bir $t_0 \in I$ noktasında $|Y(t_0)| \neq 0$ ise, her $t \in I$ için $|Y(t)| \neq 0$ sağlanır.

$|Y(t_0)| = 0$ ise, $Y(t_0)$ matrisindeki sütun vektörler lineer bağımlıdır. Buradan $\vec{y}(t_0) = 0$ özelliğine sahip

$$\vec{y}(t) = c_1\vec{y}_1(t) + c_2\vec{y}_2(t) + \cdots + c_n\vec{y}_n(t)$$

olacak şekilde, hepsi birden sıfır olmayan c_j sabitleri bulabiliriz. Üstelik, $\vec{y}(t)$, (25.4) denkleminin bir çözümüdür. Teklik nedeniyle her $t \in I$ için $\vec{y}(t) = 0$ olur. Yani, fonksiyonlar I aralığında lineer bağımlıdır.

Gösterimler. $|Y(t)| = \det(\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t))$, $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ fonksiyonlarının Wronskiyeni olarak adlandırılır.

Eğer $Y(t)$ matrisinin sütunları, $\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise, $Y(t)$, $\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}$ denklemi için *temel matris* olarak adlandırılır. Temel matris, $\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}$ denkleminin genel çözümünü ve böylece tam çözümünü verir.

Düzlem otonom sistemler. $n = 2$ durumunda

$$y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2$$

(25.5)

$$y_2' = a_{21}(t)\,y_1 + a_{22}(t)y_2$$

sistemi, bir *düzlem sistem* olarak adlandırılır. Matris gösterimini kullanarak sistemi,

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \text{ ve } \vec{y} = (y_1, y_2)^T$$

olmak üzere,

$$\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}$$

şeklinde yazarız.

a_{ij} sabit olduğu zaman, $\phi = y_1$ dönüşümü yapalım. Sistemden y_2 yok edilirse

$$(\phi' - a_{11}\phi)' = a_{12}a_{21}\phi + a_{22}(\phi' - a_{11}\phi)$$

elde ederiz.Bu denklem düzenlenirse (25.5) sisteminin

(25.6) $$\phi'' - (\operatorname{tr} A)\phi' + (\det A)\phi = 0$$

eş veya arkadaş denklemini elde ederiz.

Önerme 25.2. *Eğer* $\left(y_1(t), y_2(t)\right)^T$*, (25.5) sisteminin bir çözümü ise, hem* $y_1(t)$ *hem de* $y_2(t)$*, (25.6) eş denkleminin çözümleridir.*

İspat kolaydır ve ödev olarak bırakılmıştır.

Tersine, karşılık gelen

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$$

karakteristik polinomunun köklerini bularak, (25.6) eş denklemi (25.5) sistemini çözmek için kullanılabilir. Burada, kuadratik polinomu, A nın *karakteristik polinomu* olarak adlandırıyoruz.

Örnek 25.3.

$$y_1' = 12y_1 + 5y_2 \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y_2' = -6\, y_1 + y_2,$$

lineer sistemini göz önüne alalım. Eş denklemi $\phi'' - 13\phi' + 42\phi = 0$ dir ve çözümler, e^{6t} ve e^{7t} tarafından üretilir.

Eğer $y_1(t) = c_1 e^{6t}$ ise, $5y_2 = y_1' - 12y_1 = -6c_1 e^{6t}$ dir. Eğer $y_1(t) = c_2 e^{7t}$ ise, $y_2 = -c_2 e^{7t}$ dir. Böylece,

$$c_1 e^{6t}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} + c_2 e^{7t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sistemin genel çözümüdür.

<u>Alıştırma.</u> Aşağıdaki durum için genel çözümünü bulunuz.

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ (Yanıt. $c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} t \\ -t+1 \end{pmatrix}$)
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ (Yanıt. $c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}$)

Lineer cebir tekrarı. Bu dersi lineer diferansiyel denklem sistemlerinde kullanışlı, lineer cebir sonuçları ve gösterimlerini sıralayarak sonlandırıyoruz.

$A=(a_{ij})$, $n\times n$ matris olsun. Eğer A nın satırları ve sütunları yer değiştirilirse, elde edilen matris A nın *devriği* veya *transpozu* adını alır, ve A^T ile gösterilir. Doğrudan,

$$(A^T)^T=A,\qquad (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T,\ \ (AB)^T=B^TA^T$$

olduğu görülür. Eğer $A=A^T$ ise A matrisine *simetrik* matris denir.

$|A|$ gösterimini A nın determinantı için kullanıyoruz. A nın (i,j) minörü, M_{ij} ile gösterilir ve A nın i yinci satır ve j yinci sütunu silindiğinde elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ matrisin determinantıdır. Böylece, tanım gereği

$$|A|=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}$$

dir.

A nın kofaktörü, cof A ile gösterilir ve

$$c_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

olmak üzere, $n\times n$ $(c_{ij})_{i,j=1}^{n}$ matrisidir. Buradan

$$|A|=a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+\cdots+a_{1n}c_{1n}$$

olur. Son olarak, adj A ile gösterilen A nın (klasik) adjointi, kofaktör matrisin devriği

$$\text{adj } A=(\text{cof } A)^T,\ \ (\text{adj } A)_{ij}=c_{ji}$$

dir. Buradan, determinant için *Laplace açılım formülü*, herhangi $1\le i,j\le n$ için

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\text{cof } A)_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(\text{cof } A)_{ij}$$

elde edilir. Yani, bir determinant herhangi bir satır veya herhangi bir sütün kullanılarak hesaplanabilir.

Örnek 25.4. $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ matrisinin adjointi, adj $A=\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ dır.

Şimdi çok kullanılışlı

(25.7) $$A\,(\text{adj } A)=(\text{adj } A)A=(\det A)\,I$$

formülü üzerinde duralım. A (adj A) nın (i,j) elemanı, A nın i -yinci satırı ve cof A nın i -yinci satırının iç çarpımıdır, ve bu nedenle (25.7) aslında Laplace formülüdür.

A matrisinin

(25.8)
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I)$$

karakteristik polinomunu tanımlayalım.

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_0$$

olsun. Doğal olarak buna göre matris polinomu

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + p_1 A^{n-1} + \cdots + p_0 I$$

dir. Adjointin önemli bir özelliği

$$\operatorname{adj} A = -((-1)^n A^{n-1} + p_1 A^{n-2} + \cdots + p_0 I)$$

dir. Buradan biçimsel olarak

(25.9)
$$\operatorname{adj} A = \frac{p(0) - p(A)}{A}$$

yazılabilir.