MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

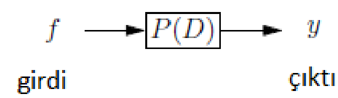
2009 Bahar

DERS 24. TRANSFER FONKSİYONU VE KUTUP DİYAGRAMI

Transfer Fonksiyonu. a_j reel sabit olmak üzere, bu kesim boyunca $P(D)$ operatörü

$$P(D) \coloneqq D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

dir. $P(D)y = f$ biçimindeki diferansiyel denklemler dalgalı akım ağları veya filtreleri temsilde yaygın biçimde kullanılır. Böyle bir filtre, girdisi $f(t)$ elektrik akımı ya da $f(t)$ gerilimi ve çıktısı $y(t)$ olan, bir kapalı kutu olarak düşünülebilir.



Şekil 24.1. Giriş-çıkış sistemi

Bu matematiksel olarak; f giriş fonksiyonunu, $P(D)y = f$ nin çözümü olan y çıkış fonksiyonuna dönüştüren operatörün incelemesi demektir. Biçimsel olarak, $y = W[f]$ yazalım. Bu durumda, $P(D)W[f] = f$ olur. Söylemek gerekirse, böyle bir giriş-çıkış operatörü $P(D)$ nin sağ tersidir.

En basit durumda, $f(t) = e^{at}$ olsun. $P(a) \neq 0$ koşulu altında,

$$y(t) = \frac{1}{P(a)} f(t) \text{ veya } W(a) = \frac{1}{P(a)}$$

dır. Giriş sinyalini çıkış sinyaline dönüştüren böyle bir fonksiyona *transfer fonksiyonu* denir. Transfer fonksiyonunun temel özelliği

$$(\text{çıkış}) = (\text{transfer fonksiyonu}) \times (\text{giriş})$$

eşitliğini sağlamasıdır.

<u>Alıştırma.</u> $\omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(t) = e^{i\omega t}$ sinüzoidal giriş sinyalinin $P(i\omega) \neq 0$ için $W(\omega) = 1/P(i\omega)$ olduğunu gösteriniz. ($P(i\omega) = 0$ rezonansa karşılık gelir.)

$P(D)$ nin bir W sağ tersi kesin biçimde tanımlı değildir. Çünkü, $P(D)y = f$ denkleminin çözümü tek değildir. W çoğu kez, başlangıç değer problemleri için $y(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$ şeklinde sıfır başlangıç koşulları altında tanımlanır.

Daha geniş bir giriş ve çıkış fonksiyonlar sınıfını onların Laplace dönüşümleri ile karakterize edebiliriz. Bu doğal biçimde transfer fonksiyonunu (onun Laplace dönüşümünü) verir. Gerçekten, $f \in E$ ise $P(D)y = f$ in denge çözümü, $W(s) = 1/P(s)$ transfer fonksiyonu olmak üzere,

(24.2) $$P(s)Y(s) = F(s) \text{ veya } Y(s) = W(s)F(s)$$

denklemini sağlar.

Yukarıdaki ikinci denklem

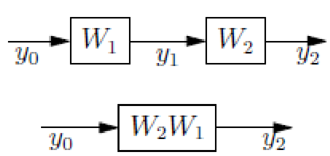
$$(\text{çıkış}) = (\text{transfer fonksiyonu}) \times (\text{giriş})$$

olduğunu söyler, ancak çarpma işlemi s-bölgesindedir.

(24.2) nin önemli bir avantajı keyfi $f \in E$ için geçerli olmasıdır. Transfer fonksiyonunun bu genişletilmiş kapsamı frekans bölgesinde çalışmanın avantajlarından biridir.

Uygulama: Geri besleme. Transfer fonksiyonu iki ya da daha fazla sistemin, bir sistemin çıkışı diğerinin girişi olacak şekilde bağlandığı zamanlarda yararlıdır.

En basit haliyle Şekil 24.2 deki üstteki sistemi ele alalım.



Şekil 24.2.

Art arda bağlanmış sistem

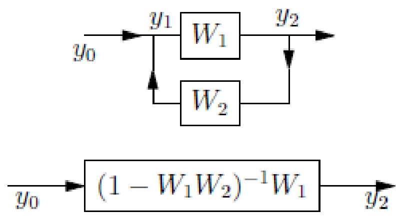
$$y_1 = W_1(s)y_0, \qquad y_2 = W_2(s)y_1$$

şeklinde tanımlanır. Buradan,

$$y_2 = W_2(s)W_1(s)y_0$$

olur. Yani Şekil 24.2 deki üstte verilen sistem altta verilen sisteme denktir. Tüm sistemin transfer fonksiyonu ayrı ayrı transfer fonksiyonlarının çarpımıdır.

Daha karmaşık bir sistem Şekil 24.3'te gösterilmiştir.



Şekil 24.3.

Burada temel sistem W_1 transfer fonksiyonuna sahip sisteme ve W_2 transfer fonksiyonuna sahip sistem W_1 sistemi için geri besleme sağlamaktadır. Bu nedenle, W_1 için toplam giriş

$$y_1 = y_0 + W_2(s) y_2$$

olur. Öte yandan,

$$y_2 = W_1(s) y_1$$

olarak tanımlanmaktadır. y_1'i yok edersek, toplam sistem için

$$y_2 = W_2(s)(y_0 + W_2(s) y_2), \qquad y_2 = \left(1 - W_1(s) W_2(s)\right)^{-1} W_1(s) y_0$$

buluruz. Bu nedenle, üstteki sistem, transfer fonksiyonu

$$\left(1 - W_1(s) W_2(s)\right)^{-1} W_1(s)$$

olan alttaki sisteme denktir.

Uygulama:Tanılama. Tanılama probleminde, bilinen bir giriş koyarsınız, çıkışı ölçersiniz ve diferensiyel denklemdeki parametreleri belirlersiniz. Deneysel bilimlerin ortak bakış açısına göre, bilinen bir girişe göre sistemin tepkisi ölçüldükten sonra, bu çıkışı üreten mekanizmayı keşfetmeye çalışabiliriz.

İncelenen sistem $P(D)y = f$ şeklinde olduğunda, diferansiyel operatörün karakteristik polinomu, yani $P(D)$ operatörü, $W(s) = 1/P(s)$ transfer fonksiyonuyla belirlenir. Böylece, tanılama problemi transfer fonksiyonunu bulma problemine indirgenir.

Çıkışın birim impuls $f(t) = \delta(t)$ olduğu en basit durumda, $F(s) = 1$ ve $y(s) = W(s)$ dir. Buna karşılık gelen $y(t)$ fonksiyonuna birim impuls tepkisi denir. Başka bir deyişle, birim impuls tepkisi transfer fonksiyonunudur.

Çıkışın $f(t) = h(t)$ birim basamak fonksiyonu olduğu başka bir basit durumda, $F(s) = 1/s$ ve

$$Y(s) = \frac{W(s)}{s}$$

bulunur. Karşılık gelen $y(t)$ fonksiyonuna birim basamak tepkisi denir.

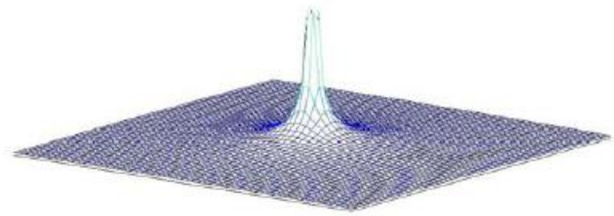
Örnek 24.1 $P(D) = D^2 + aD + bI$ ve birim impuls tepkisi $y(t) = e^{2t}\sin t$, $t > 0$ veriliyor. a ve b sabitlerini bulunuz.

ÇÖZÜM. Bu durumda, $\mathcal{L}[e^{2t}\sin t] = W(s) = \frac{1}{s^2+as+b}$ olur. $\mathcal{L}[e^{2t}\sin t] = \frac{1}{(s-2)^2+1}$. Bu nedenle, $a = 4$, $b = 5$ dir.

Kutup diyagramı. Sistemin tepkisini açık olarak hesaplamaksızın sistem hakkında bilgi edinmede olduğu gibi; Laplace dönüşümünün asıl gücü, sadece sistemlere tepkileri açık olarak hesaplayan algoritmalarda değildir. $F(s)$ deki s değişkeninin karmaşık sayılar kümesi üzerinde değiştiğini düşünmek daha anlamlıdır.

Karmaşık analizde, $s \in \mathbb{C}$ olmak üzere, eğer $(s-z)^n F(s)$ fonksiyonu $s = z$ de holomorfik ise, $F(s)$ fonksiyonuna z noktasında bir kutba sahiptir denir. Buradaki en küçük n sayısı kutbun basamağı olarak adlandırılır. $n = 1$ ise, kutup noktasına bir basit kutup denir.

Basit bir örnek, z sabit bir karmaşık sayısı olmak üzere, $F(s) = 1/(s-z)$ dir. Bu fonksiyonun büyüklüğü (boyu) $1/|s-z|$, karmaşık düzlemde reel-değerli bir fonksiyondur ve grafiği karmaşık düzlem yukarısında, s noktasındaki yüksekliği $1/|s-z|$ olan, bir yüzeydir. Bu yüzey, karmaşık düzlemde, yüksekliği z ye olan uzaklığın tersi olan bir çadıra (Şekil 24.4) benzemektedir. Grafik sanki $s = z$ de bir çadırın tepe noktasına takılı kalmış gibi, $s \to z$ iken hiperbol gibi süpürülerek sonsuza gider.



Şekil 24.4. $1/(s-z)$ nin grafiği.

Sadece basit kutupları olan bir rasyonel fonksiyon $F(s)$,

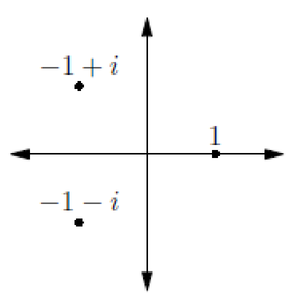
$$F(s) = p(s) + \frac{w_1}{s-z_1} + \cdots + \frac{w_k}{s-z_k}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılabilir. Burada $p(s)$ bir polinom, z_j, $w_j \in \mathbb{C}$; z_j (basit) kutuplar ve $w_j = \lim_{s\to z_j}(s-z_j)F(s)$, z_j kutbunun *rezidüsüdür*. Örneğin,

$$\frac{1}{s^3+s^2-2} = \frac{1/5}{s-1} + \frac{(-1+2i)/10}{s-(-1+i)} + \frac{(-1-2i)/10}{s-(-1-i)}$$

yazılabilir.

$F(s)$ karmaşık fonksiyonunun *kutup diyagramı*, üzerinde $F(s)$ nin kutuplarının işaretlendiği karmaşık düzlemdir. Örneğin, $\frac{1}{s^3-s^2-2}$ nin kutup diyagramı aşağıdaki gibidir.



Şekil 24.5. $\frac{1}{s^3+s^2-2}$ nin kutup diyagramı

$F(s)$ in kutup diyagramı bize $f(t)$ nin uzun zaman davranışı hakkında bilgi verir. (İlgilendiğimiz Laplace dönüşümleri genelde basit kutupları olan rasyonel fonksiyonlardır. Ancak, fonksiyonlar her zaman rasyonel değildir; $\delta(t-c)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü e^{-sc} bir tam fonksiyondur.)

Bunu görmek için, $a,\ b \in \mathbb{R}$ ve $c \neq 0$ olmak üzere, aşağıdaki fonksiyonları ele alalım.

$$F_1(s) = \frac{c}{s-1}, \qquad F_2(s) = \frac{ce^{-as}}{s-1}, \qquad F_3(s) = \frac{c}{s-1} + b\frac{1-e^{-as}}{s}$$

Bu fonksiyonların üçünün de $s=1$ de bir kutbu vardır. ($s=0$ iken $1-e^{-as}=0$ olur ve F_3 deki ikinci terimin paydasındaki s ile sadeleşir.)

$a \geq 0$ kabul edelim. Yukarıdaki fonksiyonlar, sırasıyla,

$$f_1(t) = ce^t, \qquad f_2(t) = ch(t-a)e^{t-a}, \qquad f_3(t) = ch(t-a)e^t + bh(t-a)$$

fonksiyonlarının Laplace dönüşümleridir. Bu fonksiyonlar, t nin büyük değerleri için e^t nin katları gibi davranır. Hatta $s=1$ deki rezidüye bakarak katın ne kadar olduğunu bile söyleyebilirsiniz.

Şimdi

$$F_1(s) = \frac{c(s-a)}{(s-a)^2+b^2}, \qquad F_2(s) = \frac{cb}{(s-a)^2+b^2}.$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bunlar $s = a \pm ib$ de kutupları olan

$$f_1(t) = ce^{at}\cos bt\,, \qquad f_2(t) = ce^{at}\sin bt$$

fonksiyonlarının Laplace dönüşümleridir. Kutbun *reel kısmı* maksimum büyüklükteki uzun zaman davranışını, *sanal kısmı* ise büyük t değerleri için salınım frekansını belirler. Kutup diyagramı yine küçük t değerleri için fonksiyon hakkında bir şey söylemez.

Yukarıdaki gözlemi birleştirip

$$F(s) = \frac{1}{s^3+s^2-2} = \frac{1/5}{s-1} + \frac{(-1+2i)/10}{s-(-1+i)} + \frac{(-1-2i)/10}{s-(-1-i)}.$$

fonksiyonunu inceleyelim. $F(s)$, $s=1$, $s=-1\pm i$ de kutuplara sahiptir. $f(t)$ ters dönüşümünün e^t gibi davranan ($s=1$ kutbuna karşılık gelen) bir terimi ve $e^{-t}\cos t$ gibi davranan (faz kaymalarına kadar) bir diğer terimi vardır. t büyük olduğu zaman *en sağdaki* kutuptan (reel kısmı en büyük kutup) kaynaklanan terim, $f(t)$ nin davranışında baskın olur. Gerçekten,

$$f(t) = \frac{1}{5}e^t + \frac{-1+2i}{10}e^{(-1+i)t} + \frac{-1-2i}{10}e^{(-1-i)t}$$

fonksiyonu büyük t değerleri için $\frac{1}{5}e^t$ gibi davranır.

Özetlersek, $F(s)$ nin en sağdaki kutuplarının pozisyonu $t \gg 1$ için $f(t)$ fonksiyonunun genel davranışını belierler. En sağdaki kutup $a + bi$ ise, $f(t)$ kabaca $e^{(a+ib)t}$ nin bir katı gibi davranacaktır. Yani, e^{at} gibi artar veya azalır, $\cos bt$ gibi salınım yapar.