MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

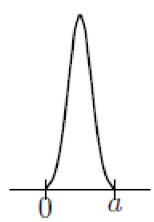
2009 Bahar

DERS 23. DİRAC DİSTRİBÜSYONU

İmpuls sinyaller: Dirac'ın düşüncesi. $\alpha > 0$ küçük bir reel sayı olsun. $f_a(t)$, $[0,a)$ aralığı dışında özdeş olarak sıfır ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)dt = \int_0^a f_a(t)dt \neq 0$$

özelliğine sahip bir fonksiyon olsun. Eğer integralin sonucu çok küçük değilse, bu durumda $f_a(t)$, $[0,a]$ aralığında oldukça büyük değerler almalıdır ve bu nedenle fonksiyon bir impuls davranışını tanımlar. Bir "impuls fonksiyonu" çok kısa bir süre devam eden fakat büyük bir etki oluşturan bir sinyali temsil eder. Fiziksel durum, bir iletken tel üzerine bir yıldırımın çarpması ya da bir mekanik sistem üzerindeki çekiç darbesi ile örneklendirilebilir.



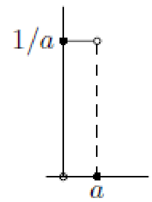
Şekil 23.1. Tipik bir impuls fonksiyon grafiği.

1930 lu yılların başında, Nobel ödüllü fizikçi P.A.M. Dirac, ilk olarak impuls fonksiyonlarla işlem yapmak için tartışmalı bir yöntem geliştirdi. $a \to 0^+$ olsun. $f_a(t)/(\int f_a(t)dt)$ fonksiyonu, $t \neq 0$ için sıfır değerini alan ve sıfırı içeren bir aralık üzerindeki integrali 1 olan diyelim ki bir $\delta(t)$ ye yaklaşsın. Bu $\delta(t)$ ye Dirac delta fonksiyonu denir.

Dirac delta fonksiyonunu tanımlamak için, $a > 0$ olmak üzere

$$f_a(t) = \begin{cases} 1/a, & t \in [0,a) \\ 0, & t \notin [0,a) \end{cases}$$

olsun. $\int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)dt = \int_0^a f_a(t)\, dt = 1$ kolayca görülür.



Şekil 23.2. $f_a(t)$ nin grafiği

Eğer $a \to 0^+$ için $f_a(t) \to \delta(t)$ ise,

(23.1)
$$t \neq 0 \text{ için } \delta(t) = 0 \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

dir. (Bu, temel diferansiyel denklemler kitaplarında çoğu kez $\delta(t)$ nin tanımıdır)

$a \to 0^+$ için

$$\mathcal{L}\{f_a(t)\} = \int_0^a e^{-st}\frac{1}{a}dt = \frac{1-e^{-sa}}{sa} \to 1$$

olduğu kolaylıkla görülür. Bu anlamda, $\delta(t)$ için

(23.2)
$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

yazılır.

Sıradan hiçbir fonksiyonun (23.1) özelliğine sahip olmadığını ifade edelim. $\delta(t)$ her neyse, t nin bir fonksiyonu değildir. Bununla birlikte, Dirac, $\delta(t)$ yi bir fonksiyonmuş gibi alarak doğru sonuçlar elde edileceğini söylemiştir.

1940 yılının sonlarında, Fransız matematikçi Laurent Schwartz[1] delta fonksiyonunu kesin bir matematiksel temel üzerinde oturtmayı başardı. Schwartz, tüm fonksiyonlar sınıfını delta fonksiyonunu içerecek şekilde distribüsyonlar sınıfı denilen sınıfa genişleterek bunu başarmıştır.

1 Laurent Schwartz'a 1950 yılında distribüsyonlar teorisi icadı için Fields ödülü (Nobel ödülünün matematikteki eşdeğeri) verildi.

Burada, ilk önce (23.1) de verilen $\delta(t)$ nin kullanışlılığını keşfedeceğiz ve daha sonra matematiksel anlamını vereceğiz.

Örnekler.

$$y'' + y = \delta(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{s^2+1}, \quad y(t) = h(t)\sin t$$

elde edilir. Burada (23.2) yi kullandık.

y çözümü $(-\infty,\infty)$ aralığında süreklidir ve $t = 0$ hariç her yerde diferansiyel denklemi sağlar. Bununla birlikte, çözüm $t = 0$ da ne denklemi ne de başlangıç koşullarını sağlar. $t = 0$ noktasında türevlenebilir bile değildir. Gerçekten $y'(0^+) = 1$ ve $y'(0^-) = 0$ dır. Birim impuls sinyali $\delta(t)$, $t = 0$ da $y'(t)$ de 1 büyüklüğünde bir sıçrama üretir.

Şimdi

$$y'' + y = f_a(t) = \begin{cases} 1/a, & t \in [0,a) \\ 0, & t \notin [0,a) \end{cases}, \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

problemini göz önüne alalım. Buradaki $f_a(t)$ fonksiyonunu

$$f_a(t) = \frac{1}{a}(h(t) - h(t-a))$$

şeklinde yazarız.

Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{s^2+1}\frac{1}{a}\frac{1-e^{-sa}}{s}$$

elde edilir. Böylece,

$$y_a(t) = \frac{1}{a}h(t)(1-\cos t) - \frac{1}{a}h(t-a)(1-\cos(t-a))$$

$$= \begin{cases} 0, & t \in (-\infty,0] \\ \dfrac{1-\cos t}{a}, & t \in (0,a) \\ \dfrac{\cos(t-a)-\cos t}{a}, & t \in [a,\infty) \end{cases}$$

elde edilir. $a \to 0^+$ için, ikinci aralık $(0,a]$ kaybolur; üçüncü $[a,\infty)$ aralığı ise $[0,\infty)$ ve bu aralıktaki fonksiyon da $\sin t$ olur. Diğer bir ifadeyle, $a \to 0^+$ için $y_a(t)$ çözümü daha önce $\delta(t)$ ile elde edilmiş olan çözümün aynısını verir. $\delta(t)$ nin (23.1) ve (23.2) deki gibi kritik olmayan kullanımı, klasik limite geçilerek elde edilen doğru sonucu vermektedir. Üstelik, klasik metot çok daha zordur. $\delta(t)$ nin yararı burada ortaya çıkmaktadır.

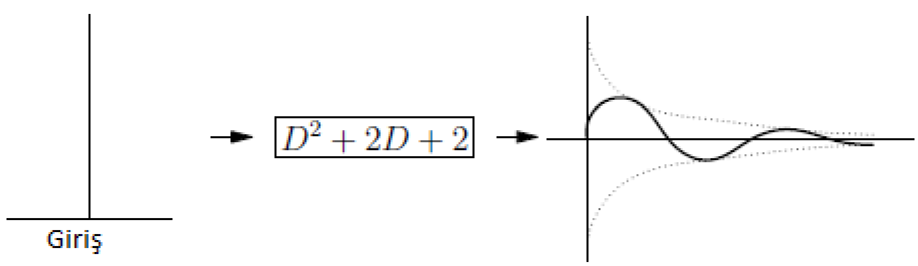
Son olarak

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

problemini göz önüne alalım. Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{(s-1)^2+1}, \quad y(t) = h(t)e^{-t}\sin t$$

elde edilir. Bu örnek, kalıcı bir etkiye sebep olan impuls sinyallerinin bir diğer özelliğini gösterir.



Şekil 23.3. İmpuls sinyallerin etkisi

Distribüsyonlar Teorisi. Dersimizi Laurent Schwartz'ın bir bakterinin çok kısa bir dahice tanımı ile tamamlayalım.

Bir fonksiyon, her t noktasındaki değerinin verilmesiyle karakterize edilir. Bir $\delta(t)$ *distribüsyonu*, t deki değeri ile değil, test fonksiyonları olarak bilinen uygun bir ϕ fonksiyonlar sınıfı üzerindeki $\delta\{\phi\}$ değerlerinin verilmesiyle karakterize edilir. Test fonksiyonlarının her mertebeden türeve sahip oldukları ve sonlu bir aralığın dışında sıfır değerini aldıkları varsayılmıştır.

Herhangi bir test fonksiyonu ϕ için, δ fonksiyonunu

(23.3)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)$$

olarak tanımlayalım. Burada, $\delta(t)$ nin bir t noktasındaki değerinden konuşamayacağımızı belirtelim. Yegane anlamlı nicelik $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt$ dır. $\delta(t)$ distribüsyonu asla tek başına kullanılamaz, ancak fonksiyonlarla birlikte kullanılır.

Eğer $\delta(t)$ bir fonksiyon ve (23.3) deki integral de alışılmış bir integral olsaydı, bu durumda bir değişken değişimiyle

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-c)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t+c)dt$$

olurdu. (23.3) kullanılırsa, ikinci taraftaki integral, $\phi(t+c)$ nin $t=0$ noktasındaki değerini verir, yani $\phi(c)$ dir. Simdi bu değeri birinci taraftaki integralin tanımı olarak alabiliriz. Böylece, $\delta(t-c)$, herhangi bir ϕ test fonksiyonu için,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-c)\phi(t)dt = \phi(c)$$

olarak tanımlanır.

Benzer şekilde, $\delta'(t)$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsaydı, kısmi integrasyon formülü

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t)dt$$

eşitliğini verirdi. (23.3) kullanılırsa, ikinci taraf $-\phi'(0)$ olur, ve bu değer $\delta'(t)$ yi, ϕ herhangi test fonksiyonu olmak üzere,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi(t)dt = -\phi'(0)$$

şeklinde tanımlar. Benzer düşünceyle, $\delta^{(n)}(t)$ fonksiyonu, ϕ herhangi bir test fonksiyonu olmak üzere,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\, \phi(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(c)$$

olarak tanımlanır.

$a < b$ için,

$$\int_a^b \delta(t-c)\phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \big(h(t-a) - h(t-b)\big)\delta(t-c)\phi(t)\, dt = \begin{cases} \phi(c), & c \in [a,b] \\ 0, & c \notin [a,b] \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

s bir sabit olmak üzere, $\phi(t) = e^{-st}$ seçimi ile

$$\mathcal{L}\{\delta(t-c)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t-s)\, dt = \begin{cases} e^{-sc}, & c \geq 0 \\ 0 \quad , & c < 0 \end{cases}$$

elde ederiz. $c = 0$ olduğunda yukarıdaki eşitlik, (23.2) ile çakışan $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ formülünü verir.

Bunların hepsi tanımdır, ancak tartışmalar bu tanımların analizin bilinen kuralları ile uyumlu olduğunu göstermektedir. $\delta(t)$ bir fonksiyon olmamasına rağmen, niçin t reel değişkenin bir fonksiyonu gibi ele alınabileceğinin sebebi budur.

Son olarak, $t < 0$, için $y(t) = 0$ ve $t > 0$ için $y'(t) = \delta(t)$ olduğunu varsayalım. Laplace dönüşümü $s\mathcal{L}y = 1$ eşitliğini önerir ve buradan $y(t)$, belki sadece $t = 0$ dışında $h(t)$ Heavisade fonksiyonu ile aynı olur. (Problemin ne fiziği ne de matematiği $t = 0$ da açıktır). Bu anlamda

$$h'(t) = \delta(t)$$

dır.