18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 20. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Laplace dönüşümünün özellikleri. Laplace dönüşümünün önemli pek çok özelliğini elde edeceğiz.

Teorem 20.1. *$f \in E$ ve $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ olsun. Bu durumda*

(i) *(s-kaydırma)* $\mathcal{L}\{e^{-ct}f(t)\} = F(s+c)$;

(ii) *(t-kaydırma)* $c \geq 0$ *ise,* $\mathcal{L}\{f(t-c)\} = e^{-cs}F(s)$ *($t < 0$ için $f(t) = 0$ dır);*

(iii) *(s-türev)* $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$;

(iv) *(t-türev) eğer f sürekli ise,* $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$;

(v) *(ölçeklendirme)* $c > 0$ *ise,* $\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$, $F(cs) = \frac{1}{c}\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{c}\right)\right\}$

dır.

İspat. (i)

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{-ct}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s+c)t}f(t)dt$$

eşitliğinden sonuç görülür.

(ii) $u = t - c$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t-c)dt = \int_{-c}^\infty e^{-s(u+c)}f(u)du = \int_0^\infty e^{-sc}e^{-su}f(u)du$$

dır. Hipotezden $-c, \infty$ limitleri $0, \infty$ ile değiştirilebilir.

(iii)

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st}f(t)\right)dt = \int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt$$

eşitliğinden sonuç görülür.

(iv) Ders 19 da ispatlandı.

(v) Değişken değiştirme ile elde edilir.

□

Alıştırma. Aşağıdakileri gösteriniz:

1. $\frac{f(t)}{t} \in E$ ise, $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(s)ds$;

2. $f \in E$ ise, $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$.

Örnek 20.2 te^t nin Laplace dönüşümünü hesap ediniz.

ÇÖZÜM. $\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$ dönüşümüne s-türev özelliği uygulanırsa

$$\mathcal{L}\{te^t\} = -\left(\frac{1}{s-1}\right)' = \frac{1}{(s-1)^2}$$

bulunur.

Alıştırma. $n = 0,1,2,\cdots$ ve $a \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 20.3 $e^{3t}\sin t$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesap ediniz.

ÇÖZÜM. $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ ifadesindede s-kaydırma özelliği uygulanırsa

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\sin t\} = \frac{1}{(s-3)^2+1}$$

elde edilir.

Alıştırma. $\mathcal{L}\{e^{-ct}\cos bt\} = \frac{s+c}{(s+c)^2+b^2}$ ve $\mathcal{L}\{e^{-ct}\sin bt\} = \frac{b}{(s+c)^2+b^2}$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 20.4 Hangi fonksiyonun Laplace dönüşümü $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$ dir.

ÇÖZÜM. $\left(\frac{2}{s^2+4}\right)' = -\frac{4s}{(s^2+4)^2}$ ve $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$ olduğunu görünüz. Buradan, s-türev özelliği ile

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{(s^2+4)^2}\right\} = t\sin 2t$$

elde edilir.

Örnek 20.5 Hangi fonksiyonun Laplace dönüşümü $\frac{1}{s^2+4s+9}$ dir.

ÇÖZÜM. Tam kareye tamamlayarak

$$\frac{1}{s^2+4s+9} = \frac{1}{(s+2)^2+5}$$

yazarız.

$$\mathcal{L}\{\sin\sqrt{5}\,t\} = \frac{\sqrt{5}}{s^2+5}$$

olduğundan, s-kaydırma özelliği ile

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+9}\right\} = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{2t}\sin\sqrt{5}\,t$$

elde edilir.

<u>Alıştırma.</u>

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+9}\right\} = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{2t}\cos\sqrt{5}\,t + \frac{2}{\sqrt{5}}e^{2t}\sin\sqrt{5}\,t$$

olduğunu gösteriniz.

Genelleştirilmiş Çözümler. a_j sabit ve $f \in E$ olmak üzere

(20.1) $$P(D)y \coloneqq y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(t)$$

diferansiyel denklemini inceleyelim. Yani f, süreksizliklere sahip olabilir. Laplace dönüşümü bu tip problemler için çok etkili bir metottur. Önce, aşağıdaki teoremi anlamalıyız.

Teorem 20.6. *$n \geq 1$ ve I bir açık aralık olmak üzere, $t \in I$ olsun. Eğer f, I nın bir noktasında basit süreksizliğe sahip ise, (20.1) denkleminin I da bir klasik çözümü yoktur.*

Bir *basit süreksizlik* noktasında sağ limit ve sol limit var ancak birbirine eşit değildir. I da bir klasik çözüm, I nın her noktasında diferensiyel denklemi sağlayan bir $y = \phi(t)$ fonksiyonudur. $n \geq 1$ koşulu, (20.1) denkleminin türev içerdiğini garanti eder. Kanıt, Darbox'un bir teoremini kullanır ve burada verilmemektedir.

Burada "çözüm" kavramını, süreksiz giriş fonksiyonlarına izin vermek için genişletiyoruz ve Laplace dönüşümü teorisini bu genelleştirme kapsamında geliştiriyoruz.

Tanım 20.7. *I aralığında tanımlı bir $y = \phi(t)$ fonksiyonu için, eğer*

(i) *ϕ, ϕ', $\cdots$, $\phi^{(n-1)}$ fonksiyonları I aralığında sürekli ve*

(ii) *I aralığında f in sürekli olduğu noktalarda $P(D)\phi(t) = f(t)$ sağlanıyorsa*

$y = \phi(t)$ fonksiyonuna (20.1) denkleminin bir genelleştirilmiş çözümü denir.

(ii) koşulu f in tüm kötü davranışlarının $\phi^{(n)}(t)$ tarafından aklandığı anlamına gelmektedir. f in süreksizlik noktalarında, denklem sağlanmayabilir. $y^{(n)}(t)$ nin mevcut olması gerekmez.

<u>Alıştırma.</u> $f \in E$ olmak üzere, (20.1) denklemi ve $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ koşullarından oluşan başlangıç değer probleminin varlık ve teklik teoremini genelleştirilmiş çözümler sınıfında oluşturunuz.

Teorem 20.8. *$f \in E$ olsun. Eğer $y(t)$ fonksiyonu (20.1) in $[0,\infty)$ aralığındaki genelleştirilmiş bir çözümü ise $y, y', y'', \cdots, y^{(n)} \in E$ dir.*

İspatın ana hatları. Önce, E nin toplama, çarpma ve integral işlemlerine göre kapalı olduğunu gösteriniz, yani $f, g \in E$ ise $f + g$, $f.g$, $\int f$, $\int g \in E$ dır.

Sonra, $P(D) = D - a$ ise, $P(D) = f$ in çözümünün

$$y(t) = e^{at}\int_0^t e^{-as} f(s)ds + ce^{at}$$

olarak verildiğini gösteriniz. Buradan $f \in E$ ise $y \in E$ olur. y' türevinin de Eye ait olduğunu göstermek için, denklemi $y' = f - P_0 y$ biçiminde yazarız. $f, y \in E$ olduğundan, $y' \in E$ dir.

Son olarak da n üzerinden tümevarım tekniğini kullanınız. □

Dönüştürülmüş denklem. a_j sabit olmak üzere

(20.2) $$P(D)y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f \in E$$

denklemini göz önüne alalım. $P(D)$ nin karakteristik polinomu

$$P(s) := s^{(n)} + a_1 s^{(n-1)} + \cdots + a_n$$

dir. f süreksiz olduğunda, "çözüm" sözcüğü "genelleştirilmiş çözüm" anlamında kullanılacaktır.

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

formülü kullanılırsa, (20.2) nin Laplace dönüşümü

$$s^n \mathcal{L}y - (s^{n-1} y_0 + \cdots + y_{n-1}) + a_1 s^{n-1} \mathcal{L}y - a_1(s^{n-2} y_0 + \cdots + y_{n-2}) + \cdots + a_n \mathcal{L}y = \mathcal{L}f$$

denklemini verir. $Y(s) = \mathcal{L}y$, $F(s) = \mathcal{L}f$ *ve* P_0 da katsayıları başlangıç koşullarına bağlı derecesi en çok $n - 1$ olan bir polinom olmak üzere, son denklemi

$$P(s)Y(s) = F(s) + P_0(s)$$

olarak yazabiliriz. P_0 ın ifadesi (19.4) den kolaylıkla elde edilebilir. Böylece

$$Y(s) = \frac{F(s)}{P(s)} + \frac{P_0(s)}{P(s)}$$

denklemine ulaşırız. Buradan $Y(s)$ in ters Laplace dönüşümü bulunursa, (20.2) denkleminin çözümünü elde ederiz.

$m \geq 0$ ve a, b, A, B sabitler olmak üzere, homogen olmayan $f(t)$ teriminin

$$t^m e^{at}(A\cos bt + B\sin bt)$$

fonksiyonlarının sonlu bir toplamı olduğunu varsayalım. Bu tip giriş fonksiyonlarla farklı içeriklerde oldukça sık karşılaşılır. $f(t)$ nin Laplace dönüşümü rasyonel fonksiyonların bir toplamıdır, yani iki polinomun oranı olan fonksiyonların toplamıdır. Örneğin, $\mathcal{L}\{t^m e^{at}\} = \frac{m!}{(s-a)^{m+1}}$ dir.Yukarıdaki tartışma bize $y(t)$ çıktısının Laplace dönüşümünün de yine rasyonel fonksiyonların bir toplamı olduğunu söyler.

$F(s)$ bir rasyonel fonksiyon olduğunda, $\mathcal{L}f(t) = F(s)$ olmak üzere, $f(t)$ yi elde etmenin temel yöntemi $F(s)$ yi basit kesirlerine ayırmaktır.

Örnek 20.9 Laplace dönüşümü yöntemiyle

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^t; \;\; y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

ÇÖZÜM. $Y(s) = \mathcal{L}y$ ve $F(s) = \mathcal{L}f$ olsun. Laplace dönüşümü alınırsa

$$s^2Y(s) - 1 - 2sY(s) + 2Y(s) = \frac{2}{s-1}, \quad Y(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s^2-2s+2)}$$

denklemlerini elde ederiz. Rasyonel fonksiyonu basit kesirle ayırıp sonra da tam kareye tamamlarsak

$$\frac{s+1}{(s-1)(s^2-2s+2)} = \frac{2}{s-1} + \frac{-2s+3}{s^2-2s+2}$$
$$= \frac{2}{s-1} - 2\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s-1)^2+1}$$

elde ederiz. Her bir terimin ters Laplace dönüşümünü bularak

$$y(t) = 2e^t - 2e^t\cos t + e^t \sin t$$

elde ederiz.

<u>Alıştırma</u> (Başlangıç ve son değer teoremleri) .

1. $f \in E$ ise, $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ olduğunu gösteriniz.
2. $f' \in E$ ve f sürekli ise, $\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)$ olduğunu gösteriniz.
3. $f \in E$ ve $\lim_{t\to\infty} f(t) = k$ ise, $\lim_{s\to 0^+} sF(s) = k$ olduğunu gösteriniz.