18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 2. TEMEL PRENSİPLER

Lineerlik. Eğer bir L (diferansiyel) operatörü L nin tanım bölgesindeki her u, v elemanı ve her c_1, c_2skalerleri için

$$L(c_1 u + c_2 v) = c_1 L(u) + c_2 L(v) \tag{2.1}$$

özelliğine sahipse, L operatörüne lineerdir denir. Örneğin, $Ly = y' + p(x)y$ biçiminde tanımlı L diferansiyel operatörü lineerdir. Burada, $p(x)$, I açık aralığında tanımlı ve L nin tanım bölgesi, I aralığında türevlenebilir fonksiyonlardır.

Lineer operatörlerin önemi aşağıdaki özellikte yatmaktadır.

Süperpozisyon Prensibi. L bir lineer operatör ise, $Lu = f$ ve $Lv = g$ olduğunda

$$L(c_1 u + c_2 v) = c_1 f + c_2 g$$

dır.

İspat açıktır ve alıştırma olarak bırakılmıştır.

Örnek 2.1.

$$Ly = y'' + y$$

olsun. $L(\sin x) = 0$ ve $L(\cos x) = 0$ aşikardır. Bu durumda, süperpozisyon kuralı, herhangi c_1, c_2 sabitleri için $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ fonksiyonunun $Ly = 0$ denklemini sağladığını gösterir. Böylece, $y'' + y = 0$ denkleminin iki parametreli çözümler ailesini elde ederiz.

Örnek 2.2.

$$Ly = y' - 2y$$

olsun. Deneyerek, $L(1) = -2, L(e^{5x}) = 3e^{5x}, L(e^{2x}) = 0$ elde edilir. Süperpozisyon ilkesi, c herhangi bir sabit olmak üzere, $y = -4 + 2e^{5x} + ce^{2x}$, $Ly = 8 + 6e^{5x}$ fonksiyonunun bir çözüm olduğunu gösterir.

Alıştırma. (Tamamlayıcı Çözüm İlkesi). L bir lineer operatör olsun. u, $Lu = f$ denkleminin bir çözümü ve v de $Ly = 0$ denkleminin bir çözümü ise, $y = u + v$ nin $Ly = f$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Varlık ve Teklik. Fizik ve mühendislikten bir problem diferansiyel denklemler cinsinden ifade edildiğinde, istenilen çözümün mevcut ve tek olması gereklidir. Bunlar sırasıyla *varlık* ve *teklik* konularıdır. İki konu arasındaki fark: teklik en fazla bir çözümün olabileceğini teyit ederken varlık en az bir çözümün mevcut olduğunu teyit eder.

Bu derste, varlık teorisini önemsiz görmeyerek, pek çok diferansiyel denklemi, diyelim ki, 3-5 ondalık kesir doğru yaklaşıklıkla bilgisayarlarla çözmek kolaydır. (Bir kişinin açık olarak çözebildiği özel bir diferansiyel denklem sınıfı için varlık konusu bitmiştir.) Diğer taraftan, teklik teorik bir konudur ve yalnızca analitik kanıtlar yoluyla çalışılabilir.

Bunu uygun biçimde ifade etmek için

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$$

ile verilen bir fiziksel sistemi inceleyelim. $y = \sin x$ in bir çözüm olduğu kolaylıkla görülebilir; varlık problemi yoktur. Bu özel çözüm bir salınım davranışını tanımlar, ve sistemin salınımlı bir hareketi olduğunu söylemek ikna edicidir. Ancak, teklik konusu şüpheliyken, benzer bir yargıya varamayız.

Aslında teklik bozulabilir.

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0 = y(\pi)$$

problemini göz önüne alalım. $y = \sin x$ bir çözümdür ve varlık aşikardır. Fakat, herhangi $A \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için $y = A \sin kx$ de çözümdür. O halde, sonsuz sayıda çözüm vardır. Bu sistem yukarıdaki gibi ikinci mertebeden basit bir diferansiyel denklem ve basit iki yan koşuldan oluşmaktadır. Gerçekten, sistem asılı bir sicimin küçük salımlarını ifade eden mükemmel bir fiziksel sistemdir.

Tekliğin bozulmasın bir diğer örneğini verelim.

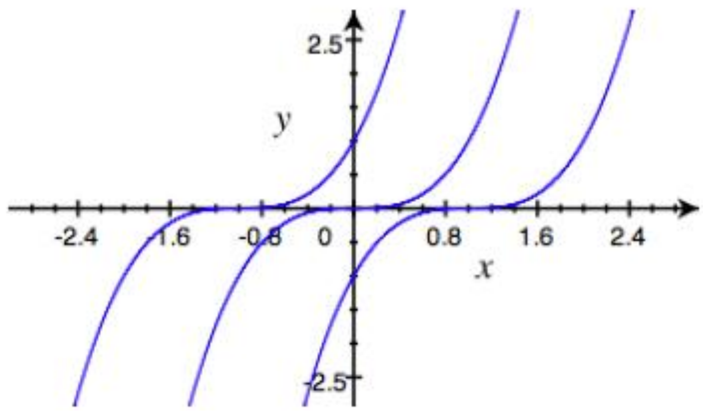
Örnek 2.3.

$$y' = 3y^{2/3} \tag{2.2}$$

denklemini göz önüne alalım. c bir sabit olmak üzere, $y = (x - c)^3$ in denklemin çözümü olduğu açıktır. Ancak, başka çözümler de vardır. Gerçekten $y \equiv 0$ denklemin bir çözümüdür. Üstelik herhangi $a < b$ için grafiği aşağıda çizilen

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^3, & x < a \\ 0, & a \le x < b \\ (x-b)^3, & x \ge b \end{cases}$$

fonksiyonu (2.2) denkleminin bir çözümüdür.



Şekil 2.1. (2.1) in çözümleri

Böylece, (2.2) denklemi, a ve b ye bağlı iki parametreli çözüm ailesine sahiptir.

Tekliğin bozulması her zaman kötü değildir. Çözümün, muhtemelen tek çözümün, birden fazla çözüme ayrıldığı noktaya dallanma noktası denir. Bu tip noktalarda sistemin kalitatif davranışında ani değişiklik meydana gelir. Dallanma, tekliğin bozulduğu özel bir haldir ve uygulamada önemlidir. Örneğin,

$$y' = (a-c)y - by^3, \quad b > 0 \tag{2.3}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada, b ve c ye sabit, a ya da parametre olarak bakalım. Eğer $a < c$ ise $y = 0$ diferansiyel denklemin tek sabit çözümüdür. Fakat, $a > c$ ise denklemin $y = 0$ çözümüne ilaveten $y = \pm\sqrt{(a-c)/b}$ iki sabit (durağan) çözümü daha vardır. Diğer bir deyişle, $a = c$ de aşikar sabit çözümden aşikar olmayan sabit çözümler dallanmıştır. Bu durumda $a = c$ bir dallanma noktasıdır.

Şimdi bir temel teklik teoremi verelim.

Teorem 2.4 (Bir teklik teoremi). *Eğer $f(y)$ fonksiyonu (x, y) düzlemindeki bir R bölgesinde sürekli türevlenebilir, sınırlı ve ek olarak f' türevi de R bölgesinde sınırlı ise, herhangi bir $(x_0, y_0) \in R$ noktası için*

$$y' = f(y)$$

denkleminin $y(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan en fazla bir çözümü vardır.

İspat ileride daha genel bir durum için verilecektir.

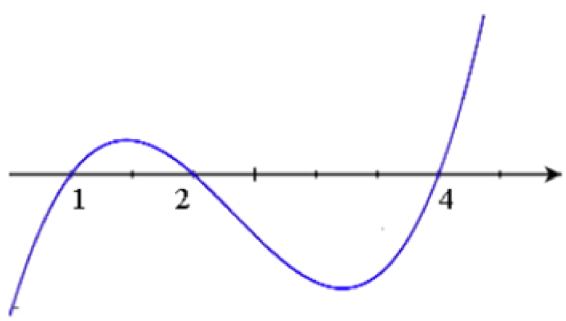
Uyarı. Eğer $f(y) = 3y^{2/3}$ ise, $y = 0$'ı içeren bir bölgede $f'(y) = 2y^{-1/3}$ sınırlı değildir ve bu durum teoremin koşulları ile çelişmez.

Alıştırma. (2.2) nin çözüm eğrilerinin, x ekseni ve $y = x^3$ eğrileri arasındaki bölgeyi tamamen doldurduğunu gösteriniz. Yani, bu bölgedeki herhangi bir (x_0, y_0) noktası için (2.1) in $y(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan bir çözümü vardır.

Kalitatif Davranış. $\frac{dy}{dx} = f(y)$, çözüm eğrisi üzerindeki herhangi bir noktada $y = \phi(x)$ çözümünün eğimini ve diferansiyel denklemi çözmeksizin sistemin bir kalitatif davranışını verir.

$$y' = (y-1)(y-2)(y-4) = f(y) \tag{2.4}$$

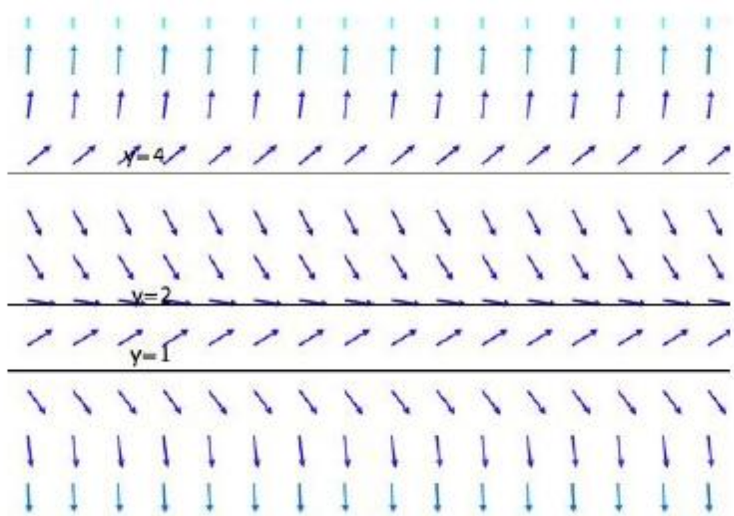
denklemini göz önüne alalım. $f(y)$ nin grafiği aşağıda verilmektedir.



Şekil 2.3.$f(y)$ nin grafiği.

(2.4) denkleminin $y = 1$,2 ve 4 sabit (durağan) çözümlerine sahip olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu sabit çözümlerde $f(y) = 0$ ve buradan $y' = 0$ dır. Bu nedenle, çözüm eğrileri yatay doğrulardır.

Şimdi $f(y)$ nin işaretinden (2.4) denkleminin sabit olmayan çözümlerinin davranışını inceleyelim. Eğer $y < 1$ ise, $f(y)$ negatiftir ve çözümler azalan fonksiyonlardır. Bu, çözümlerin $y = 1$ den uzaklaşması anlamına gelir. Benzer şekilde, eğer $1 < y < 2$ ise $f(y)$ pozitiftir, ve çözümler $y = 1$ den uzaklaşır $y = 2$ ye doğru yaklaşırlar. Eğer $2 < y < 4$ ise, çözümler $y = 2$ ye yaklaşmakta, $y = 4$ den uzaklaşmaktadır. Son olarak, eğer $y > 4$ ise, çözümler $y = 4$ den uzaklaşırlar. Bu sebeplerden dolayı, $y = 2$ çözümünün kararlı, $y = 1$ ve 4 çözümlerinin kararsız olduğunu söyleriz. Çözüm eğrileri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



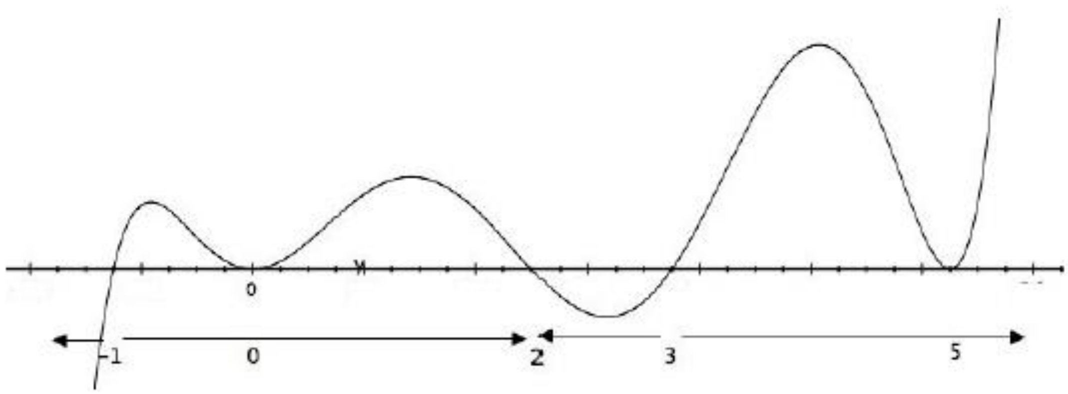
Şekil 2.4. (2.4) ün kalitatif davranışı

Burada kararlılık/kararsızlığın sezgisel tanımlarını kullandık. Kesin tanımlar daha sonra verilecektir.

Daha karışık

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)^3\, y^4 (y-1)^2 (y-3)^5 (y-5)^8 = g(y)$$

denklemini göz önüne alalım. $g(y)$ nin grafiği ve işareti aşağıdaki şekilde belirtilmiştir.



Şekil 2.5. $g(y)$ nin grafiği ve işaret değişimi

Daha önce yaptığımıza benzer bir argümanla, $y = 2$ kararlı iken, $y = -1, 3$ çözümlerinin kararsız olduğunu söyleriz. $y = 0, 5$ sabit çözümlerinin de yarı kararlı olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü, $y = 0$ ya da $y = 5$ in bir tarafında birbirine komşu çözümler sabit çözümlere yaklaşmakta fakat diğer tarafında uzaklaşmaktadırlar.