MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

BÖLÜM 5. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Laplace dönüşümü yöntemi, başlangıç değer probleminin genel çözümünün bulunması ve sonrasında keyfi sabitlerin hesaplanmasına girmeden çözümün elde edilmesine olanak sağlar. Metot, özellikle süreksiz girişli (bir anahtarın kapanması gibi) ve ani girişli problemlerde faydalıdır. Konvolusyon olarak bilinen integral ifadesi, frekans bölgesinden (s-bölgesi) zaman bölgesine (t-bölgesine) kolay geçişe izin verir ve bizi zaman bölgesindeki açık çözümlere ulaştırır. Mühendislikte, transfer fonksiyonu ve kutup (pole) diyagramı kavramlarına ilgi devam etmektedir.

DERS 19. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

$[0, \infty)$ aralığında tanımlı bir f fonksiyonunun Laplace dönüşümü

(19.1)
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{st} f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{st} f(t)dt$$

limitin mevcut olduğu s ler için tanımlı $F(s)$ fonksiyonudur. Tanıma göre, $s > s_0$ olduğunda limit mevcut olacak şekilde f fonksiyonuna bağlı bir s_0 vardır. s parametresi genel olarak karmaşık bir sayı olarak değerlendirilir, ancak bu derslerimizde s parametresi reel sayı olarak alınmaktadır.

Pierre-Simon Laplace olasılık teorisi üzerindeki çalışmalarında bu dönüşümünü kullandığından, onu onurlandırmak için Laplace dönüşümü onun adıyla anılmaktadır.

Örnek 19.1.

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-st} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1 - e^{-sT}}{s} = \begin{cases} \frac{1}{s}, & s > 0 \\ \infty, & s \leq 0 \end{cases}$$

dir. $s = 0$ durumunda integralin değeri T dir ve $T \to \infty$ için integral ∞ a gider. Bu $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$ olduğunu gösterir.

Örnek 19.2. Bir a reel sabiti için

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}e^{at}dt = \lim_{T\to\infty}\frac{e^{(a-s)T}-1}{a-s} = \begin{cases}\dfrac{1}{s-a}, & s>a\\ \infty \quad , & s\le a\end{cases}$$

dır. Buradan $s>a$ için $\mathcal{L}[e^{at}](s)=\frac{1}{s-a}$ olur. Eğer a karmaşık sayı ise, benzer hesaplama $s>\mathrm{Re}\,a$ için $\mathcal{L}[e^{at}](s)=\frac{1}{s-a}$ olduğunu gösterir

Alıştırma. (19.1) formülünü kullanarak $\mathcal{L}[\cos bt]$ ve $\mathcal{L}[\sin bt]$ yi hesaplayınız.

YANIT. $\frac{s}{s^2+b^2}$ ve $\frac{b}{s^2+b^2}$

Burada, Laplace dönüşümü için iki gösterim kullanılacaktır. Birinci gösterimde bir f fonksiyonu ile onun F dönüşümü arasındaki ilişki küçük harfle ve büyük harfle gösterilir. İkinci gösterimde f nin Laplace dönüşümü, $\mathcal{L}$ Laplace dönüşüm operatörü olmak üzere, $\mathcal{L}f$ ile gösterilir.

Bir dönüşüm olarak $\mathcal{L}$, lineerdir. Yani, her c_1, $c_2$sabiti ve Laplace dönüşümleri mevcut her f_1 ve f_2 fonksiyonu için

$$\mathcal{L}[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)] = c_1\mathcal{L}[f_1]+c_2\mathcal{L}[f_2]$$

dır.

Üstel tip(ten) fonksiyonlar. Belirtelim ki $f(t)$, $t\in[0,\infty)$ aralığında tanımlı olmasına rağmen onun Laplace dönüşümü genellikle farklı bir aralıkta tanımlıdır. Örneğin, e^{2t} nin Laplace dönüşümü sadece $s\in(2,\infty)$ için tanımlıdır. Bu, (19.1) integralinin, genel olarak, yeterince büyük s ler için mevcut olacağı içindir.

(19.1) tanımı ile ilgili oldukça ciddi bir zorluk s nin hiçbir değeri için integralin mevcut olmayabileceğidir. Örneğin, $f(t)=e^{t^2}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü mevcut değildir. Bir f fonksiyonunun Laplace dönüşümünün varlığını en azından $s\in(s_0,\infty)$ aralığında garanti etmek için, $f(t)$ üzerine bazı koşullar yükleriz.

Tanım. Bir reel ya da karmaşık değerli f fonksiyonuna aşağıdaki koşulları sağlıyorsa üstel tiptendir denir ve $f\in E$ ile gösterilir:

(i) f fonksiyonu her $T>0$ için $[0,T]$ aralığında tanımlı ve parçalı süreklidir, yani f sonlu sayıdaki nokta dışında süreklidir;

(ii) $|f(t)| \leq Ae^{Bt}$ eşitsizliği f fonksiyonuna bağlı bazı A,B sabitleri ve her $t \in [0,\infty)$ için sağlanır.

Önerme 19.3. *$f \in E$ ise, f nin Laplace dönüşümü yeterince büyük tüm s ler için mevcuttur.*

İspat. $f(t)$ parçalı sürekli olduğundan $\int_0^T e^{-st} f(t)dt$ integrali her T için mevcuttur. Bu integralin $T \to \infty$ limitinin varlığını göstermek için

$$\int_0^T e^{-st}|f(t)|dt \leq \int_0^T e^{-st} Ae^{Bt}dt \leq \frac{A}{s-B}, \qquad s > B$$

olduğuna dikkat edelim. Bundan dolayı[1], $s > B$ için $f(t)$ nin Laplace dönüşümü mevcuttur.

Diferensiyel denklemlerin çözümü. Diferansiyel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşümü kullanmanın esas yararı, $f'(t)$ ile $f(t)$ nin Laplace dönüşümlerinin çok yakından ilişkili olması gerçeği altında yatmaktadır. Aşağıdaki önemli Lemma bununla ilgilidir.

Lemma 19.4. Eğer, f, $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve $f' \in E$ ise, bu durumda $f \in E$ ve

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0) \tag{19.2}$$

dır.

İspat. Kısmi integrasyon işlemi uygulanırsa

$$\int_0^T e^{-st} f'(t)dt = [e^{-st}f(t)]_0^T + s\int_0^T e^{-st}f(t)dt \tag{19.3}$$

elde edilir. $f \in E$ ve teoremin varsayımları altında kısmi integrasyonun geçerliliğinin ispatı ödev olarak bırakılmıştır. Eğer, $|f(t)| \leq Ae^{Bt}$ ve $s \geq B+1$ ise, (19.3) ün ikinci yanındaki ilk terim T üst limitinde

$$|e^{-sT}f(T)| \leq e^{(B+1)T}Ae^{BT} = Ae^{-T}$$

1 Burada, $f(t)$ parçalı sürekli ise $\int_0^\infty f(t)dt$ integralinin varlığı ile $\int_0^\infty |f(t)|\, dt$ integralinin varlığının eşdeğer olduğu kalkulüs gerçeğini kullanıyoruz.

eşitsizliğini sağlar ve $T \to \infty$ için sıfıra gider. Bu nedenle, (19.3) te $T \to \infty$ için limit işlemi iddiayı kanıtlar.

Alıştırma.

$$(19.4) \qquad \mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s) = s^n \mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

olduğunu gösteriniz.

Göz önüne alınan diferansiyel denklemler $k = 1,2, \ldots$ olmak üzere $ct^k e^{\lambda t}$ biçimindeki fonksiyonların toplamından oluşan y çözümlerine sahiptir. Bu nedenle, hem çözümler hem de türevleri Lemma 19.4 ün hipotezlerini sağlar. Dolayısıyla,

$$\mathcal{L}y' = s\mathcal{L}y - y(0)$$

dır. Bu bağıntı, y ye göre bir diferensiyel denkleme ait başlangıç değer problemini, çözmek için daha kolay olan, $\mathcal{L}y$ ye göre bir cebirsel denkleme dönüştürmemizi mümkün kılar. Teori, şeklini İngiliz mühendis Oliver Heaviside tarafından geliştirilen sembolik bir yöntemden alır.

Bir örnek olarak

$$y' - y = e^t, \qquad y(0) = 1$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{L}y' - \mathcal{L}y = \mathcal{L}e^t \qquad \text{ya da} \qquad s\mathcal{L}y - 1 - \mathcal{L}y = \frac{1}{s-1}$$

olur. Buradan, $\mathcal{L}y = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}$ dir. Bu bize $y(t)$ çözümünün Laplace dönüşümünü verir. $y(t)$ yi bulmak için, biçimsel olarak $\mathcal{L}^{-1}$ ile gösterilen *ters Laplace dönüşümüne* başvurmalıyız. Nasıl ki $\mathcal{L}y$ (19.1) yardımıyla $y(t)$ cinsinden açık olarak ifade ediliyor, $y(t)$ yi de $\mathcal{L}y$ cinsinden bir açık formül[2] ile yazabiliriz. Bununla birlikte, bu formül bir karmaşık değişkene göre integral

2 Fourier-Mellin integrali olarak adlandırılan formül.

içerir ve bu dersin kapsamının çok ötesindedir. Bu nedenle, bu formül yerine, gelecek derste, çoğu Laplace dönüşümün tersini kontrol ederek yani "hangi fonksiyonların Laplace dönüşümleri olduklarını hatırlayarak" bulmamızı sağlayacak Laplace dönüşüm operatörünün bazı özelliklerini ispatlayacağız

Yöntem aşağıdaki açıklamaları gerekli kılmaktadır.

Teorem 19.5 (Teklik). *Eğer f ve g, E sınıfından fonksiyonlar ise ve Laplace dönüşümleri çakışıyorsa, bu durumda her iki fonksiyonun sürekli olduğu tüm $t \geq 0$ noktalarında $f(t) = g(t)$ dir.*

İspat bir başka bağımsız teoreme bağlıdır.

Lemma 19.6. *Eğer q, $0 \leq x \leq 1$ aralığında sürekli ise,*

$$\int_0^1 x^n q(x)dx = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots \quad \Rightarrow \quad q(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Teorem 19.5'in ispatı. f ve g Teorem 19.5 deki gibi olsun. Laplace dönüşümleri sırasıyla U, V, W olan u, v, w fonksiyonları

$$u(t) = f(t) - g(t), \qquad v(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau, \quad w(t) = e^{-ct}v(t)$$

olsun. Kabulden, yeterince büyük s ler için $U(s) = 0$, ve amacımız süreklilik noktalarında $u(t) = 0$ olduğunu ispat etmektir. Büyük s ler için $V(s) = \frac{U(s)}{s} = 0$ olduğunu belirtelim. Buna göre, eğer $v(t) = 0$ ise tüm süreklilik noktalarında $u(t) = 0$ olduğu kalkulüsün temel teoreminden elde edilir. Bu nedenle, u dan ziyade sürekli v fonksiyonu ile çalışacağız.

Yeterince büyük c sabiti için, Laplace dönüşümünün kaydırma teoremine göre, her $s > 0$ için $W(s) = V(s + c) = 0$ (sadece büyük s ler için değil) olur. $u \in E$ olduğundan

$v \in E$ dir, ve büyük c ler için

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st}F(s)ds$$

biçimindedir. Burada γ, $\gamma > \mathrm{Re}(s_F)$ koşulunu sağlayan reel sayı ve s_F de $F(s)$ nin bir aykırı noktasıdır.

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = 0 \tag{19.5}$$

olduğu ortaya çıkar.

$x = e^{-t}$ değişken değişimi yapıldığında

$$W(s) = \int_0^\infty e^{-st} w(t)dt = \int_0^1 x^{s-1} w(-\ln x)dx$$

elde ederiz.

$$q(x) = \begin{cases} w(-\ln x), & 0 \le x \le 1 \text{ için} \\ 0 \quad\quad\quad\quad, & x = 0 \text{ için} \end{cases}$$

olsun. (19.5), $0 \le x \le 1$ için q nun sürekli olduğunu garanti eder. Her $s \ge 0$ için $W(s) = 0$ olduğundan, $s = 1,2,3, \dots$ için $W(s) = 0$ dır. Böylece, iddia Lemma 19.6 dan elde edilir. □

Lemma 19.6. nın ispatı. Bir $x_0 \in (0,1)$ noktasında $q(x_0) \ne 0$ olsun. $q(x_0) > 0$ olduğunu varsayabiliriz. Süreklilik

$$|x - x_0| \le 2\delta \Rightarrow q(x) \ge \epsilon$$

olacak şekilde ϵ, δ pozitif sabitlerini verir. m bir pozitif tamsayı olsun ve

$$p(x) = 1 + 4\delta^2 - (x - x_0)^2, \;\; I_m = \int_0^1 p^m(x) q(x) dx$$

tanımlayalım. Binom teoreminden $p^m(x)$, x e göre bir polinomdur. Buradan hipotezler altında $I_m = 0$ elde edilir.

Diğer taraftan, J_1, J_2, J_3 ler sırasıyla $[0,1]$ nın bir parçası olan

$$|x - x_0| < \delta, \qquad \delta \le |x - x_0| \le 2\delta, \qquad |x - x_0| > 2\delta$$

aralıklarındaki integraller olmak üzere, $I_m = J_1 + J_2 + J_3$ dir. Bu üç aralıkta

$$p(x) \ge 1 + 3\delta^2, \qquad p(x) \ge 1, \qquad |p(x)| \le 1$$

ve eğer M yeterince büyük bir sabit ise

$$q(x) \ge \epsilon, \qquad q(x) \ge \epsilon, \qquad |q(x)| \le M$$

dir. Buradan

$$J_1 \geq (1+3\delta^2)^m \delta\,\epsilon, \qquad J_2 \geq 0, \qquad J_3 \geq -M$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Birinci ifade $m \to \infty$ için ∞'a gider ve böylece $I_m \to \infty$ dır. Bu, $I_m = 0$ ile çelişir. □

Örnek 19.7. $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 6$ başlangıç değer problemini çözünüz.

ÇÖZÜM. Laplace dönüşümü

$$s^2 \mathcal{L}y - 5s - 6 + 4\mathcal{L}y = 0$$

ifadesini verir. Buradan

$$\mathcal{L}y = \frac{5s+6}{s^2+4} = 5\frac{s}{s^2+4} + 3\frac{2}{s^2+4}$$

ve $y(t) = 5\cos 2t + 3\sin 2t$ elde edilir.