MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 14. KARARLILIK

Kararlılık kavramı. Kaba bir ifadeyle, bir sistemin uzun zaman davranışı başlangıç koşullarına önemli ölçüde bağlı değilse, sisteme *kararlıdır* denir.

Yaylara takılı bir kütle sisteminin (sönümlü veya sönümsüz) kararlı olduğu mekaniğin önemli bir sonucudur. Benzer sonuç ağ (network) teorisinde vardır. Bu dersde, p ve q sabitler ve $f(t)$ bir dış kuvveti temsil etmek üzere,

$$y'' + py' + qy = f(t) \tag{14.1}$$

biçimindeki diferansiyel denklemleri inceleyeceğiz.

Denklemin genel çözümünün

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$$

biçiminde olduğunu öğrenmiştik. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitler ve y_p, (14.1) in bir özel çözümüdür; $c_1y_1 + c_2y_2$ tamamlayıcı çözüm, yani $f(t) = 0$ halindeki (14.1) homogen denklemin genel çözümüdür.

Başlangıç koşulları, c_1 ve c_2 değerlerini belirler. Buradan, c_1 ve $c_2$nin herhangi bir seçimi için $t \to \infty$ durumunda $c_1y_1 + c_2y_2 \to 0$ oluyorsa, (14.1) sistemine kararlıdır deriz.

Eğer (14.1) kararlı ise, o zaman y_p ye durağan durum çözümü ve $c_1y_1 + c_2y_2$ ye de geçici çözüm denir. Fiziksel olarak; kararlı bir sistemde çıktı, geçici terim ile durağan durum teriminin toplamıdır. Geçici terim, etkisi zamanla kaybolan başlangıç koşullarına bağlıdır. Durağan terim, sistemin $f(t)$ girdisine uzun zaman tepkisini temsil eder.

Kararlılık koşulları. p_j sabit ve

$$L = D^n + p_1D^{n-1} + \cdots + p_{n-1}D + p_n \tag{14.3}$$

olmak üzere, $Ly = f$ denkleminin hangi koşullar altında kararlı olduğunu araştıracağız.

Tanım 14.1. L, (14.3) de verilen operatör olmak üzere, $Ly = f$ diferansiyel denklemi,

(i) $Ly = 0$'ın her çözümü $t \to \infty$ için sıfıra gidiyorsa, *asimptotik kararlı*;

(ii) $Ly = 0$'ın her çözümü $t \to \infty$ için sınırlı ise, *kararlı*;

(iii) kararlı değilse*, kararsız*

olarak adlandırılır.

Kararlılığın, $Ly = 0$ homogen denkleminin çözümlerinin davranışı ile ilgili olduğunu belirtelim.

$f(t) = 0$ olduğu zaman, $y(t) \equiv 0$ bir durağan çözümdür. Bu durumda, durağan durumdan küçük başlangıç sapmaları zaman içerisinde küçük kalıyorsa, sistem kararlıdır.

Tanıma göre, $Ly = f$, $Ly = 0$ ın her baz çözümü $t \to \infty$ için sıfıra gidiyorsa asimptotik kararlı, sınırlı kalıyorsa kararlıdır. L nin karakteristik polinomu ve cebirin temel teoreminden, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ lerin hepsi farklı ve $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$ olmak üzere,

$$L = (D - \lambda_1)^{k_1}(D - \lambda_2)^{k_2} \ldots (D - \lambda_m)^{k_m}$$

yazabiliriz.

<u>Alıştırma.</u> $c_j(t)$, k_{j-1} 'inci dereceden bir keyfi polinom olmak üzere, $Ly = 0$ homogen denkleminin genel çözümü

$$y(t) = c_1(t)e^{\lambda_1 t} + c_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_m(t)e^{\lambda_m t}$$

biçimindedir.

<u>Alıştırma.</u> Eğer r bir negatif olmayan bir tamsayı ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise, $\mathrm{Re}\lambda < 0$ için

$$\lim_{t\to\infty} |t^r e^{\lambda t}| = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Böylece, eğer her j için $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ ise $Ly = f$ asimptotik kararlı; $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ veya $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$ ancak $k_j = 1$ ise, $Ly = f$ denklemi kararlıdır.

Sonucu aşağıdaki teoremle özetleyelim.

Teorem 14.2. *$Ly = f$ denklemi, eğer L nin karakteristik polinomunun her kökü negatif reel kısımlı ise asimptotik kararlı; eğer katlı kökler negatif reel kısımlı ve basit (katsız) köklerin hiçbiri pozitif reel kısımlı değilse kararlıdır.*

Örnek 14.3. p ve q sabitler olmak üzere, ikinci mertebeden

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{14.4}$$

diferansiyel denklemi göz önüne alalım. $\Delta = p^2 - 4q$ diskriminantının çözümlerin yapısı hakkında bilgi verdiğini hatırlayalım; bu nedenle (14.4) kararlılığı hakkında da bilgi verir.

Eğer $q < 0$ ise $\Delta > 0$ dir ve karakteristik polinom $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ zıt işaretli iki reel köke sahiptir. Bu nedenle, (14.4) kararsızdır.

Eğer $p < 0$ ise karakteristik polinomun en az bir kökü pozitif reel kısma sahip olmak zorundadır. Bu nedenle, (14.4) kararsızdır.

Eğer $p = 0$ ve $q > 0$ ise, (14.4) denklemi $y'' + qy = 0$ denklemine iner. Bu nedenle, (14.4) kararlıdır fakat asimptotik kararlı değildir.

Son durum olarak $p > 0$ ve$q > 0$ olsun. Eğer $\Delta \leq 0$ ise karakteristik polinomun kökleri negatif reel kısımlıdır ve (14.4) asimptotik kararlıdır. Eğer $\Delta > 0$ ise $\Delta = p^2 - 4q < p^2$ ve buradan $\sqrt{\Delta} < p$ dir. Bu nedenle, (14.4) asimptotik kararlıdır.

Özetlersek, (14.4) denkleminin asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul $p, q > 0$ ve kararlı olması için gerek ve yeter koşul $p \geq 0$, $q > 0$ olmasıdır.

Yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin kararlılığı. Yukarıdaki örnekler, kararlılık kriterini denklemin katsayıları cinsinden ifade eder. Bu, karakteristik polinomun köklerinin hesaplanmasını gerektirmemesinden dolayı pratiktir.

$p_j$ler sabit olmak üzere, yüksek mertebeden

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{14.5}$$

denklemi asimptotik kararlı ise, her j için $p_j > 0$ olduğunu göstermek çok zor değildir (ödev). Ancak, tersi doğru değildir (ödev). (14.5) in katsayıları cinsinden bir kararlılık kriteri çıkarımı için katsayılar daha karışık bir dizi eşitsizliği sağlamak zorundadır. Bu eşitsizlikleri aşağıda ispatsız olarak ifade ediyoruz.

Kararlılık için Routh-Hurwitz Kriteri. $k > n$ için $p_k = 0$ olmak üzere, (14.5) denkleminin asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & \dots & \dots & \dots & p_n \end{vmatrix}$$

determinantının tüm n esas minörlerinin pozitif olmasıdır; yani, üst sol köşedeki $1,2,\dots,n$ boyutlu alt determinantların, sırasıyla,

$$p_1, \qquad \begin{vmatrix} p_1 & 1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{vmatrix}, \dots$$

pozitif olmasıdır.

<u>Alıştırma.</u>

$$(D^4 + 2D^3 + 6D^2 + 5D + 2) = 260 \sin 2t$$

denklemini göz önüne alalım.

(a) Bir özel çözüm bulunuz. (Yanıt. $11 \cos 2t - 3 \sin 2t$)

(b) Karşılık gelen karakteristik polinomun

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + 3\lambda + 2)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

şeklinde çarpanlarına ayrıldığını ve sıfırlarının negatif reel kısıma sahip olduğunu gösteriniz.

(c)

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

determinantının Routh-Hurwitz kriterini sağladığını gösteriniz.