MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS12. TEMEL ÇÖZÜMLER

Sabit katsayılı

$$L_0y = p_1y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_ny \tag{12.1}$$

diferansiyel denklemi ile ilişkili sonuçlar veriyoruz. Oluşturduğumuz bazı sonuçlar değişken katsayılı denklemler için de geçerlidir.

$p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n$, L_0 operatörüne karşılık gelen karakteristik polinom olsun. Cebirin temel teoremine göre1; p, karmaşık sayılar cismi üzerinde

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$$

şeklinde lineer çarpanların çarpımı olarak çarpanlarına ayrılır. Burada λ_j, $p(\lambda)$ nın (karmaşık) kökü ve $k_j \geq 1$ λ_j nin katıdır.

Son dersten, $r = 0,1, \dots, \lambda_{j-1}$ ve $j = 1,2, \dots, m$ olmak üzere $t^r e^{\lambda_j t}$ fonksiyonlarının $L_0y = 0$ denkleminin (karmaşık) çözümleri olduğunu hatırlayalım. Üstelik, her $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$, $\overline{\lambda} = \mu_j - i\nu_j$, $\mu_j, \nu_j \in \mathbb{R}$ eşlenik karmaşık kök çifti, $r = 0,1, \dots, k_{j-1}$ olmak üzere, $L_0y = 0$ ın $t^r e^{\mu_j t} \cos \nu_j t$, $t^r e^{\mu_j t} \sin \nu_j t$ reel çözümlerini verir.

Amacımız, $L_0y = 0$ denkleminin her çözümünün bu n çözümün lineer kombinasyonu olduğunu göstermektir. Yani, bu çözümler $L_0y = 0$ denkleminin çözümlerinin bir bazını oluşturur.

Lineer bağımsızlık. Skaler cisme bağlı olarak, lineer bağımsızlığın iki gösterimi vardır. Bir I aralığında tanımlı n tane reel veya karmaşık $f_1, f_2, \dots, f_n$ fonksiyonuna, eğer $c_j \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$c_1f_1(t) + c_2f_2(t) + \cdots + c_nf_n(t) = 0 \ \ \forall t \in I \quad \Rightarrow \quad c_j = 0 \ \ \forall j$$

sağlanıyorsa, reel cisim üzerinde lineer bağımsızdırlar denir. Karmaşık cisim üzerinde, bir reel veya karmaşık fonksiyonlar cümlesinin lineer bağımsızlığını benzer biçimde tanımlayabiliriz.

1 İlk defa Carl Friedrich Gauss tarafından ispatlanmıştır.

Lemma 12.1. *Bir I aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar cümlesinin reel cisim üzerinde lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul, fonksiyonlar cümlesinin karmaşık cisim üzerinde lineer bağımsız olmasıdır.*

Şimdi bu alt bölümün esas sonucunu ifade edelim.

Lemma 12.2. *r negatif olmayan bir tamsayı ve $\lambda_j \in \mathbb{C}$ olmak üzere,*

$$f_{rj}(t) = t^r e^{\lambda_j t}, \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{12.2}$$

biçimindeki fonksiyonların herhangi bir koleksiyonu, iki veya daha fazla fonksiyon özdeş eşit olmadıkça, boş olmayan herhangi bir açık aralıkta lineer bağımsızdır.

İspat. $f_{rj}(t)$ lerin hepsinin farklı olduğunu varsayalım. t nin bir açık aralığında, bazı r ve j ler için $c_{rj} \neq 0$ olmak üzere,

$$\sum c_{rj} f_{rj}(t) = 0$$

kabul edelim. Bir j sabitleyelim ve $c_{rj} \neq 0$ olacak şekilde r nin en büyük değerini R seçelim.

Sabit katsayılı

$$p(D) = \left(D - \lambda_j\right)^R \prod_{i \neq j} (D - \lambda_i)^{k_i + 1}$$

lineer diferansiyel operatörünü oluşturalım. Burada k_i, $t^r e^{\lambda_i t}$ nin (12.2) deki fonksiyonlardan biri olacak şekildeki en büyük r sayısıdır. $p(D)\left(\sum c_{rj} f_{rj}\right) = p(D)(0) = 0$ olduğu açıktır.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} p(D)\left(\sum c_{rj} f_{rj}\right) &= \prod_{i \neq j} (D - \lambda_i)^{k_i + 1} \left(D - \lambda_j\right)^R \left(\sum c_{rj} f_{rj}\right) \\ &= c_{R_j} \prod_{i \neq j} (D - \lambda_i)^{k_i + 1} \left(D - \lambda_j\right)^R \left(t^R e^{\lambda_j t}\right) \\ &= c_{R_j} (R!) \prod_{i \neq j} \left(\lambda_j - \lambda_i\right)^{k_i + 1} e^{\lambda_i t} \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu çelişki teoremin ispatını tamamlar. □

Sonuç 12.3. *L_0, (12.1) de verilen operatör olmak üzere, $L_0 y = 0$ diferensiyel denklemi $t^r e^{\lambda t}$ biçiminde en az n tane lineer bağımsız reel veya karmaşık çözüme sahiptir.*

p_j lerin reel sabitler olduğu $L_0 y = 0$ diferansiyel denklemi, reel cisim üzerinde, boş olmayan bir aralıkta lineer bağımsız olan

$$t^r e^{\lambda t},\ \ t^r e^{\mu t} \cos\ \nu t\ ,\ \ t^r e^{\mu t} \sin \nu t$$

biçiminde n tane fonksiyona sahiptir.

Temel çözümler. Şimdi, p_j ler reel ve L_0, (12.1) de verilen operatör olmak üzere, $L_0 y = 0$ homogen denkleminin her çözümünün, Sonuç 12.3 de elde edilen çözümlerin bir lineer kombinasyonu olduğunu gösterelim. Bu bağlamda, $p_j(t)$ ler bir I aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere, daha genel

(12.3) $$Ly = y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t) y' + p_n(t) y = 0$$

diferansiyel denklemi için bazı sonuçlar oluşturacağız.

$N(L)$ ile gösterilen $Ly = 0$ ın çözüm kümesi, $Ly = 0$ denkleminin çözümlerinin bir koleksiyonudur.

Alıştırma. $N(L)$ nin $C^n(I)$ nın bir lineer alt uzayı olduğunu gösteriniz.

$Ly = 0$ ın *çözümlerinin bir bazı*, bu durumda, $N(L)$ lineer uzayının bir bazı olarak tanımlanmaktadır. Diğer bir ifadeyle, $Ly = 0$ ın herhangi bir çözümü bazdaki çözümlerin bir lineer kombinasyonu olarak bir tek biçimde ifade edilir.

L, (12.3) ile verilen operatör olmak üzere, $Ly = 0$ diferensiyel denklemiyle

$$T: N(L) \to \mathbb{R}^n, \qquad Ty = (y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{n-1}(t_0))$$

dönüşümünü ilişkilendirelim. T operatörünün lineer olduğu açıktır. T nin 1-1 olduğunu gösterelim. Yani, $Ly = 0$ tek çözüme sahiptir.

Lemma 12.4 (Teklik). *L, (12.3) de verilen operatör ve p_j fonksiyonları de t_0 noktasını içeren kapalı I aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer y, $Ly = 0$ denkleminin reel veya karmaşık çözümü ise ve*

$$y(t_0) = y'^{(t_0)} = \cdots = y^{(n-1)}(t_0) = 0$$

ise, bu durumda her $t \in I$ için $y(t) = 0$ dır.

İspat. İspat ikinci mertebeden denklemlerdeki ispata benzerdir. Eğer y bir reel çözüm ise,

$$E(t) = y^2(t) + {y'}^2(t) + \cdots + \left(y^{(n-1)}(t)\right)^2$$

olsun. Bir $k > 0$ sabiti için $\frac{dE}{dt} \leq kE$ diferensiyel eşitsizliği elde edilir. Detaylar ödev olarak bırakılmıştır. Eğer y bir karmaşık çözüm ise, reel ve sanal kısımlar $Ly = 0$ denklemini ve başlangıç koşullarını sağlayan reel çözümlerdir. Bu ispatı tamamlar. □

İlaveten eğer T operatörünün üzerine olduğunu gösterirsek, yani herhangi bir n boyutlu $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $Ly = 0$ denkleminin

$$y(t_0) = y_0, \dots, y^{n-1}(t_0) = y_{n-1}$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir çözüme sahip olduğunu gösterirsek, bu durumda T bir izomorfizm olur. Özel olarak, $N(L)$ 'nin boyutu n dir. Buna göre $Ly = 0$ denkleminin çözümlerinin bir bazı, n tane fonksiyon içerir.

L operatörünün katsayıları reel sabitler ise, yani, L_0 (12.1) deki gibi olmak üzere, $L = L_0$ ise $Ly = 0$ denklemi

$$t^r e^{\lambda t}, \qquad t^r e^{\mu t} \cos \nu t, \qquad t^r e^{\mu t} \sin \nu t$$

biçiminde n tane lineer bağımsız(reel) çözüme sahiptir. Bu durumda, bu n tane çözüm $Ly = 0$ denkleminin çözümlerinin bir bazını oluşturur. Bu sonuç, değişken katsayılı denklemler için de geçerlidir.

<u>Alıştırma.</u> L, (12.3) de verilen operatör ve $p_j(t)$ ler $t_0 \in I$ aralığında reel değerli sürekli fonksyonlar olmak üzere, $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ fonksiyonları $Ly = 0$ ın n tane lineer bağımsız çözümü olsun. $Ly = 0$ denkleminin, verilen keyfi $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ reel sayıları için

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

koşullarını sağlayan, $y(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(t)$ çözümündeki $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerinin tek şekilde belirlenebileceğini gösteriniz.

Euler-Cauchy denklemi. n'inci mertebeden lineer denklemler arasında çözümlerinin bir bazının elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade edilebildiği birkaç ilginç sınıf vardır. Bu denklemlerin bir sınıfı tartıştığımız sabit katsayılı denklemlerdir. Bir diğer sınıf ise

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = 0, \qquad x > 0$$

biçimindeki denklemlerdir. Burada $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$, x e göre k yıncı mertebeden türev ve $p_j$ler sabitlerdir. Bu yapıdaki denklemler, Euler tarafından daha önce çalışılmış olmasına rağmen Cauchy nin eş boyutlu denklemi olarak adlandırılır.

$x = e^t$ değişken değişimi, sabit katsayılı bir denklem doğurur ve çözümlerin bir bazı

$$t^r e^{\lambda t}, \qquad t^r e^{\mu t} \cos \nu t\,, \qquad t^r e^{\mu t} \sin \nu t$$

fonksiyonlarından oluşur. Bu durumda, x cinsinden

$$x^\lambda (\log x)^r,\ \ x^\mu \cos(\nu \log x) \text{ ve } x^\mu \sin(\nu \log x)$$

elde edilir.