18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 10. MAKSİMUM PRENSİBİ

Bir fonksiyonun maksimum ve minimuma ulaştığı noktaları göz önüne alarak, bir diferansiyel denklemin çözümleri hakkında detaylı bilgiye, denklemi çözmeksizin, sahip olunabilir.

Terminolojiyi gözden geçirerek başlayalım. Eğer bir x noktası bir I aralığa ait fakat onun bir uç noktası değilse, x'e I aralığının bir *iç noktası* denir. Sonlu uzunluktaki bir aralığa *sınırlı,* uç noktalarını içeren bir aralığa da *kapalı* aralık denir. Örneğin, $1 < x \leq 2$ aralığı sınırlı fakat kapalı değildir. $1 \leq x \leq 2$ aralığı hem sınırlı ve kapalıdır. $x > 1$ aralığı ise ne sınırlı ne de kapalıdır.

I aralığında tanımlı reel değerli bir $f(x)$ fonksiyonuna, $x_0 \in I$ ve $\forall\, x \in I$ için $f(x_0) \geq f(x)$ oluyorsa, x_0 noktasında bir maksimuma sahiptir denir. Eğer x_0, I nın bir iç noktası ise x_0 maksimuma iç maksimum ve $f(x_0) > 0$ ise maksimuma pozitif maksimum denir. Negatif iç minimum benzer şekilde tanımlanır. $f(x_0) \geq f(x)$ eşitsizliği $x \in J$ ve $x_0 \in J$ olmak üzere sadece $J \subset I$ açık alt aralığında sağlanıyorsa, maksimuma yerel maksimum denir. Bundan böyle, maksimum ve minimum terimlerini sırasıyla yerel maksimum ve yerel minimum anlamında kullanacağız.

Kalkulüsün aşağıdaki teoremini hatırlayalım.

Teorem 10.1. *Sınırlı ve kapalı bir aralıkta tanımlı reel değerli bir fonksiyon maksimum ve minimum değerlerini bu aralıkta alır.*

Türevlenebilir bir f fonksiyonu bir x_0 iç maksimum veya minimum noktasında $f'(x_0) = 0$ eşitliğini sağlar. Eğer f iki kere türevlenebilir ise, maksimum noktada $f''(x_0) \leq 0$ ve minimum noktada $f''(x_0) \geq 0$ ek koşulunu sağlar. Böylece, iki kere türevlenebilir bir f fonksiyonu bir pozitif iç maksimumda

$$(10.1) \qquad f(x_0) > 0, \qquad f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) \leq 0$$

ve negatif iç minimumda

$$(10.2) \qquad f(x_0) > 0, \qquad f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) \leq 0$$

koşullarını sağlar.

Buradaki amacımız bir diferansiyel denklemin çözümleri hakkında bilgi elde etmek için (10.1) ve (10.2) denkleminin nasıl kullanıldığını göstermektir. Problemin ifadesinde kapalı olarak belirtilebileceği bir durum gibi şu kabulü yapalım: $a < b$ ve y fonksiyonu $a \leq x \leq b$ veya $a \leq x < \infty$ kapalı aralığında sürekli ve iç noktalarda iki kere türevlenebilirdir.

Örnek 10.2.

$$y'' + e^x y' = (x^2+1)y, \qquad y(a) = y(b) = 0$$

sınır değer probleminin tek çözümünün $y = 0$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM. Eğer y özdeş olarak sıfır değilse, $a < c < b$ olmak üzere bir c noktasında bir pozitif maksimum veya bir negatif minimum olmak zorundadır. Bu noktada, $y'(c) = 0$ ve diferansiyel denklem

$$y''(c) = (c^2+1)y(c),$$

olur. Böylece (10.1) ve (10.2) nin koşulları çelişkiye neden olur.

(10.1) ve (10.2) en geniş anlamda *maksimum prensibini* oluştururlar. Daha dar anlamda da, "maksimum prensibi" terimi, y nin $a < x < b$ aralığında bir kestirimini $y(a)$ ve $y(b)$ sınır değerlerinden belirlemek için kullanılır.

Örnek 10.3. y nin $a \le x \le b$ aralığında, $|y(a)|, |y(b)| \le m$ ($m > 0$ bir sabit) olmak üzere,

$$(\cos x)^2 \;\; y'' + x^2(1-x)y' = 2y$$

denklemini çözdüğünü kabul edelim. $a < x < b$ için $|y(x)| < m$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM. Aksi halde, y ya bir pozitif iç maksimuma ya da bir negatif iç minimuma sahiptir. Her bir koşul Örnek 10.2 de olduğu gibi çelişkiye neden olur.

Rolle teoreminin bir sonucu olarak bir aralıkta $y' > 0$ ise, y kuvvetli artandır. $y' > 0$ ifadesi bir diferansiyel eşitsizliğe örnektir. Diferansiyel eşitsizlikler diferansiyel denklemlerin modern teorisinin bir ana alt alanını oluşturur.

Örnek 10.4. $y(0) \ge 0, y'(0) > 0$ ve

$$e^x\, y'' + \sin x \;\, y' - (1+x)y \ge 0, \qquad x > 0$$

eşitsizliklerini sağlayan bir y fonksiyonunun kesin artan olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM. Aksi halde, $0 < x_1 < x_2$ ve $y(x_1) \ge y(x_2)$ olacak şekilde x_1 ve x_2 noktaları vardır. Grafik yardımıyla, $0 \le x \le x_2$ aralığının bir c iç noktasında $y\,\mathrm{nin}$ pozitif maksimuma ulaştığı açıktır. (Analitik kanıt Teorem 10.1 kullanılarak verilebilir). Maksimum noktasında $y'(c) = 0$ ve diferansiyel eşitsizlikten

$$e^c\, y''(c) - (1+c)y(c) \geq 0$$

elde ederiz. O zaman (10.1) çelişki doğurur.

Bir y fonksiyonunun *sıfırı* $y(x) = 0$ olan noktadır. Genel olarak, ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemin bir çözümü, özdeş olarak sıfır değilse, birbirine çok yakın sıfırlara sahip olamaz.

Örnek 10.5. $b > 0$ olmak üzere, $y(x)$,

$$y'' + e^{-x}y' = (\sin x)y, \qquad x > 0$$
$$y(0) = y(b) = 0$$

sınır değer probleminin bir çözümü olsun. $y \equiv 0$ değilse, $b > \pi$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM. $b \leq \pi$ ve $0 < x < b$ için $y \equiv 0$ olmasın. Bu durumda bir $0 < c < b$ noktasında y nin bir pozitif maksimumu veya negatif minimumu vardır. c noktasında diferansiyel denklem $y''(c) = (\sin c)y(c)$ olur ve (10.1) ve (10.2) ile çelişkiye sebep olur. Buradan, $0 < x < b$ aralığında $y = 0$ ve dolayısıyla $y'(b) = 0$ dır. Başlangıç değer problemleri için teklik teoreminden $y \equiv 0$ elde edilir.

Alıştırma. $q(x) > 0$ ve $\lambda < 0$ ise,

$$w'' + \lambda q(x)w = 0, \quad w(a) = w(b) = 0$$

probleminin aşikar olmayan bir çözümünün mevcut olmadığını gösteriniz.

Alıştırma. $w, w(0) = 0$ olmak üzere,

$$e^{\cos x}\; w'' - x^2 w + x^3 = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$$

denkleminin bir çözümü olsun. $y = w - x$ fonksiyonunun herhangi bir $x = c$ noktasında bir pozitif maksimuma veya negatif minimuma sahip olduğunu gösteriniz. Ayrıca, w'' ve $w - x$ fonksiyonlarının aynı işaretli olduğunu gösteriniz.

3.

$$(\cosh x)y'' + (\cos x)y' = (1 + x^2)y, \quad a < x < b$$
$$y(a) = y(b) = 1$$

probleminin bir çözümü y olsun. $a < x < b$ için $0 < y(x) < 1$ olduğunu gösteriniz.