MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

BÖLÜM 1: BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Diferansiyel denklemlerin analizinde temel prensipleri ortaya koyacağız. Birinci mertebeden lineer denklemlerin ve birinci mertebeden lineer olmayan değişkenlerine ayrılabilir sınıftan denklemlerin çözümlerini bulmak için integral kullanımını göstereceğiz. İkinci mertebeden özel tipten diferansiyel denklemler ve lineer rasyonel tipten denklemler incelenirken değişken değiştirme yöntemleri kullanılacaktır.

DERS 1. İNTEGRASYON VE ÇÖZÜMLER

İntegralin temel teoreminden, f, I aralığında sürekli ise

(1.1)
$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(s)ds = f(x), \qquad x_0, x \in I$$

olduğunu biliyoruz.

(1.2)
$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü, I aralığında denklemi sağlayan $y = \phi(x)$ fonksiyonudur. (1.1) dikkate alındığında, $y = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$ (1.2) denkleminin bir çözümü olur. Buradan aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Teorem 1.1. *f fonksiyonu $x_0 \in I$ aralığında sürekli ise, verilmiş bir keyfi y_0 sayısı için (1.2) denkleminin $y(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan bir tek çözümü vardır. Çözüm*

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

dir.

Alıştırma. Çözümün tekliğini ispat ediniz.

Uyarı 1. Teorem, çözümün varlık aralığını ve göz önüne alınan fonksiyonlar sınıfını (sürekli fonksiyonlar sınıfı) belirtmektedir. $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulu verildiğinde, çözümün varlığını ve tekliğini teyit etmektedir.

Uyarı 2. Teoremin ifadesindeki başlangıç koşuluna bakmaksızın çözümün varlık aralığı I dır. Bu lineer denklemlere özgü bir özelliktir. Lineer olmayan denklemler için, çözümlerin varlık aralığı genel olarak başlangıç değerine bağlıdır. Örneğin,

$$y' = y^2, y(0) = y_0 \neq 0$$

başlangıç değer probleminin çözümü $y = \frac{y_0}{1-y_0 x}$ olarak verilmektedir. Çözüm $y_0 > 0$ için, $x \in [0, \frac{1}{y_0})$ aralığında tanımlıdır.

Uyarı 3. f fonksiyonu sürekli ise $\int_{x_0}^{x} f(s)ds$ belirli integrali Riemann toplamlarının bir limiti olarak tanımlanmaktadır. Belirli integrale anlam vermek için $\int f(x)dx$ belirsiz integralini biçimsel olarak bulmak gerekmez. Örneğin, $\operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-s^2} ds$ hata fonksiyonu ve $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin s}{s}\, ds$ Sine integral fonksiyonu coğunlukla belirli integral olarak tanımlanır.

Örneğin,

$$y' = \sin x^2, \ \ y(0) = 0$$

başlangıç değer probleminin çözümü $S(x) = \int_0^x \sin s^2\, ds$ Fresnel Sine integrali ile verilmektedir. $F'(x) = \sin x^2$ olacak bicimde elemanter bir F fonksiyonu yoktur, fakat belirli integral olarak tanımlanan $S(x)$ fonksiyonu bu özelliği sağlayan gerçek bir fonksiyondur.

Yukarıdaki inceleme, muhakeme yöntemiyle (1.2) biçimindeki bir denklemin nasıl çözebileceğini ortaya çıkarmaktadır. Herhangi bir x_0 için, bir çözüm $\int_{x_0}^{x} f(s)ds$ fonksiyonudur. Bu durumda, diğer çözümler bu özel çözüme bir C keyfi sabiti eklemekle elde edilir. Buna göre $y' = e^{-x^2}$ nin çözümleri $y = \int e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(x) + C$ fonksiyonlarıdır. (1.2) nin her hangi bir çözüm eğrisinden, diğerleri $(x, y) \to (x, y + C)$ dik ötelemeler ile elde edilir ve bu çözümler C parametresinin her bir değeri için bir parametreli eğriler ailesini oluşturur.

Kareleme. Bir diferansiyel denklemin çözümü bir ya da daha fazla integral içeren bir formülle ifade ediliyorsa, denkleme kareleme ile çözülebilir denir. "Kareleme" teriminin tarihsel kökeni alanın integral ile ilişkisidir. Düzlem geometride, bir çemberin karelenmesi gibi kareleme problemi, düzlemsel şeklin alanı ile ilgili problemdir. Tüm diferansiyel denklemler kareleme yöntemiyle çözülemezler. İlerde, birinci mertebeden

$$y' + p(x)y = q(x)$$

lineer denkleminin kareleme ile çözülebileceğini fakat bazı özel durumlar dışında ikinci mertebeden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

lineer denkleminin kareleme ile çözülemeyeceğini göreceğiz.

İkinci en basit diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \tag{1.3}$$

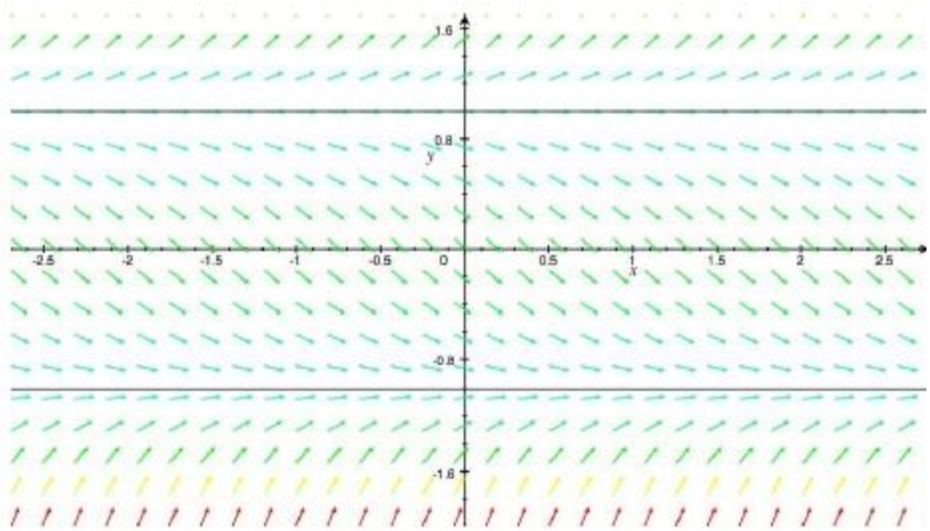
şeklindedir. Böyle bir diferansiyel denklem, $(x, y) \to (x + C, y)$ yatay ötelemesi altında değişmezdir. Bu geometrik olarak şu anlama gelir. Herhangi bir yatay doğru tüm çözüm eğrileri tarafından aynı açı ile kesilir (Bu doğrular “eş eğimli doğruları” olarak adlandırılır). Bu yüzden, eğer $y = \phi(x)$, (1.3) denkleminin bir çözümü ise, herhangi bir C sabiti için $y = \phi(x + C)$ de bir (1.3) ün çözümüdür. (1.3) denklemi, $\frac{dy}{g(y)} = dx$ biçiminde yazıldıktan sonra integral alınarak çözülebilir.

Örnek 1.2.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 1 \tag{1.4}$$

denklemini göz önüne alalım. $y^2 - 1 = (y - 1)(y + 1)$ olduğundan, $y = \pm 1$ sabit fonksiyonları (1.4) denkleminin özel çözümleridir. Bu çözümler x den bağımsız olması anlamında durağan veya değişmeyen çözümler, ya da denge noktaları olarak ta adlandırılır.

Eğer $|y| < 1$ ise $y^2 - 1 < 0$ ve (1.4) den $y' < 0$ elde edilir. Yani, çözüm fonksiyonu azalandır. Diğer taraftan eğer $|y| > 1$ ise $y' = y^2 - 1 > 0$ olduğundan, çözüm fonksiyonu artandır. Buradan (1.4) denkleminin çözüm eğrilerinin kalitatif davranışının aşağıdaki gibi olduğu elde edilir.



Şekil 1.1. $y' = y^2 - 1$ denkleminin çözümlerinin kalitatif davranışı

Değişkenlerine ayırma tekniği (ileride bu tekniği detaylı olarak tartışacağız) ve basit kesirlere ayırma işlemi kullanarak, (1.4) denklemi

$$2dx = \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy$$

olarak yazılır. Bu durumda, integral alınırsa

$$y(x) = \frac{1 \pm e^{2(x-c)}}{1 \mp e^{2(x-c)}}$$

elde ederiz.

Değişkenlerine ayırma tekniğinde $y = \pm 1$ özel çözümleri kaybolmaktadır. Ancak, teknik diğer tüm çözümleri vermektedir. Eğer $y = \phi(x)$ (1.4) denkleminin bir çözümü ise $1/\phi(x)$ inde çözüm olduğunu belirtelim.

Alıştırma. $y' = y^3 - y$ diferansiyel denkleminin çözümlerini tartışınız.