MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

DERS 0. TERMİNOLOJİ VE KAPALI ÇÖZÜMLER

Bir *diferansiyel denklem* (DD), bilinmeyen bir fonksiyonunun türevleri, bilinen nicelikler ve fonksiyonlar arasındaki bir denklemdir. Çoğu fiziksel kanun diferansiyel denklemlerle ifade edilirler.

Adi diferansiyel denklemler, bilinmeyenleri tek değişkene bağlı fonksiyonların oluşturduğu denklemlerdir. Çoğunlukla, dinamik sistemlerde ve elektrik mühendisliğinde ortaya çıkarlar. Kısmi diferansiyel denklemler bilinmeyen fonksiyonu iki ya da daha fazla bağımsız değişkene bağlı denklemlerdir. Bu derste, sadece adi diferansiyel denklemlere odaklanacağız.

Bir diferansiyel denklemin basamağı, n denklemde bulunan n'inci türevi göstermek üzere, en büyük n tamsayısıdır.

NOTASYON. Genellikle bağımsız değişkenler için t,x, bilinmeyen fonksiyonlar için y, u veya v harflerini; parametrik eğrilerin düzlem sistemleri için de bağımsız değişken olarak t, bilinmeyenler için x, y harflerini kullanacağız. Türevi ($'$) sembolü ile göstereceğiz. Örneğin; y bilinmeyen fonksiyon, t bağımsız değişken olduğunda y', $\frac{dy}{dt}$ ve y'' ise, $\frac{d^2y}{dt^2}$ anlamındadır.

Biz bilinmeyen için y ve bağımsız değişken için t kullanacağız.

n'inci mertebeden bir diferansiyel denklemin en genel biçimi

$$F\left(t, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

şeklindedir. n'inci mertebeden bir diferansiyel denklem

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

biçiminde ifade edilebilirse, denkleme normal biçimindedir denir.

Diferansiyel denklemler, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere, genellikle bir $I = \{t: a < t < b\}$ açık aralığında incelenir. I aralığında tanımlı bir diferansiyel denklemin çözümü, denklemde $y = \phi(t)$, $y' = \phi'(t), \dots$ yerine konulduğunda, her t için denklemi sağlayan $y = \phi(t)$ fonksiyonudur.

Eğer bir diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerine göre lineer ise denkleme lineerdir denir. n'inci mertebeden en genel bir lineer denklem

$$p_0(t)y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y = f(t)$$

biçimindedir. Burada, $j = 0,1,2,\dots,n$ olmak üzere $p_j(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları bir aralıkta sürekli fonksiyonlardır. $f \equiv 0$ ise denkleme homogen denklem denir. Eğer bir denklem lineer değilse, denkleme lineer olmayan denklem denir. Örneğin $y'^2 = t + y$ ve $yy' = t$ denklemlerinin her biri lineer olmayan denklemdir.

Pek çok problem, iki veya daha fazla bilinmeyenli birden fazla diferansiyel denklemi doğurur. Örneğin,

$$x' = f(t,x,y), \;\; y' = g(t,x,y)$$

iki bilinmeyenli bir denklem sistemidir.

Başlangıç değer problemleri. Genellikle uygulamalarda karşılaşılan diferansiyel denklemler sonsuz sayıda çözüme sahiptir. Örneğin, $y' = f(t,y)$ denklemi, c parametresine bağlı $y = \phi(t,c)$ çözümler ailesine ve $y'' = f(t,y,y')$ denklemi de, c_1, c_2 parametrelerine bağlı $y = \phi(t,c_1,c_2)$ çözümler ailesine sahiptir. Bu parametreler integrasyon sabiti gibidir. Örneğin, c_1 ve c_2 integrasyon sabitlerine bağlı olan $y = c_1 t + c_2$ iki parametreli çözüm ailesini elde etmek için $y'' = 0$ denklemini çözeriz.

Parametreleri belirlemenin en basit yolu, bilinmeyen y ve türevlerinin bir t_0 noktasında tayin edilmesidir. Örneğin, $y' = f(t,y)$ denklemi için $y(t_0) = y_0$ ve $y'' = f(t,y,y')$ için $y(t_0) = y_0, \;\; y'(t_0) = y_1$ koşulları verilebilir. Bunlara *başlangıç koşulları*, y_0 ve y_1 değerlerine de başlangıç değerleri denir. "Başlangıç değeri" terimi kullanılmasının nedeni çoğu problemde t'nin zamanı göstermesi ve t_0'ında başlangıç anı olmasıdır.

Bir başlangıç değer problemi,

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

koşullarını sağlayan

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

diferansiyel denkleminin çözümünün (ya da çözümlerinin) bulunmasından oluşur.

Kapalı çözümler.

$$(0.1) \qquad\qquad x + yy' = 0$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $' = \frac{d}{dx}$ dir.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2(x + yy')$$

olduğundan, c bir sabit olmak üzere, $y = \phi(x)$ fonksiyonun (0.1) denkleminin bir çözümü olması ile $x^2 + y^2 = c$ olması eşdeğerdir. Bu anlamda,

$$(0.2) \qquad x^2 + y^2 = c$$

ifadesi *kapalı* biçimde (x, y nin bir fonksiyonu olarak) (0.1) denkleminin çözümlerini tanımlar.

$c < 0$ için, $x^2 + y^2 = c$ nin geometrik yeri boş kümedir ve çözüm vermez. $c = 0$ için geometrik yer $(x, y) = (0,0)$ tek noktasından ibarettir. Ancak, bu türevlenebilir bir fonksiyon vermediğinden bir çözüm tanımlamaz. $c > 0$ için çözüm eğrisi, merkezi orijinde $\sqrt{c}$ yarıçaplı bir çemberdir.

(0.2) denkleminden y çözülürse,

$$y = \pm\sqrt{c - x^2}$$

(açık) çözümü elde edilir. Bunlar alt ve üst yarı çemberlere karşılık gelir. Bu fonksiyonlar $-\sqrt{c} \leq x \leq \sqrt{c}$ aralığında tanımlıdır, ancak sadece $-\sqrt{c} < x < \sqrt{c}$ aralığında (0.1) denkleminin çözümleridir. Çünkü, $y' = \pm\frac{x}{\sqrt{c-x^2}}$, $x = \pm\sqrt{c}$ noktalarında sonsuz olur.

$(x, y) = (\pm\sqrt{c}, 0)$ noktalarında $\frac{dy}{dx} = \infty$ olduğundan (0.1) bağıntısı bozulur. Bununla birlikte geometrik yorum anlamlı kalmaktadır. (0.1) denklemi

$$(0.3) \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

normal formunda yazılırsa; y', çözüm eğrisinin eğimi anlamındadır ve ikinci taraf (x, y) noktasındaki eğimi verir. $(\pm\sqrt{c}, 0)$ noktasındaki çözüm eğrisinin eğiminin x eksenine dik olduğu sonucuna varılır.

Bu problemin üstesinden gelmek için, (x, y) düzleminde bir eğrinin sadece $y = \phi(x)$ şeklinde değil $x = \psi(y)$ şeklinde de tarif edilebileceğini belirtelim. (0.3) denklemi, ϕ türevlenebilir olmak üzere, $y = \phi(x)$ fonksiyonunu verir ve denklemin hiçbir çözüm eğrisi, $\frac{dy}{dx} = \infty$ olduğu $(x, 0)$ noktasını içeremez. Fakat

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$

denkleminde $y = 0$, buna bağlı olarak $\frac{dx}{dy} = \psi'(y) = 0$, olması mümkündür.

Doğa, koordinat sistemlerini tanımaz; sadece altında yatan gerçeğin matematiksel açıklaması için bir çerçeve oluşturur. Eğer bir problem $x = \psi(y)$ biçiminde çözüme izin verildiğinde kolay, fakat $y = \phi(x)$ biçiminde çözümde ısrar edildiğinde zorlaşıyor ise, bu problemin formüle edilişinde bağımlı ve bağımsız değişken tercihini uygunsuz yaptığımız anlamına gelebilir.