

MIT AçıkDersSistemi

<http://ocw.mit.edu>

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

Bu bilgilere atıfta bulunmak veya kullanım koşulları hakkında bilgi için

<http://ocw.mit.edu/terms> web sitesini ziyaret ediniz.

18.034 FİNAL DENEME SINAVI 1

Gösterim. $' = \frac{d}{dt}$

1. (a) $x^2y^3dx + x(1 + y^2)dy = 0$ diferansiyel denklemi tam mıdır?

(b) $\mu(x, y)(x^2y^3dx + x(1 + y^2)dy) = 0$ diferansiyel denklemi tam olacak şekilde $\mu(x, y)$ fonksiyonunu bulunuz.

(c)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2y^3}{x(1 + y^2)}$$

diferansiyel denklemini çözünüz.

2. (a)

$$y'' + \frac{2t}{t^2 - 1}y' - 16\frac{1}{(t^2 - 1)^2}y = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümlerinin bir bazı

$$y_1(t) = \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2, \quad y_2(t) = \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2$$

olarak verilmiştir. $W(y_1, y_2)$ Wronskiyenini hesaplayınız.

(b) Parametrelerin değişimi yöntemini kullanarak

$$y'' + \frac{2t}{t^2 - 1}y' - 16\frac{1}{(t^2 - 1)^2}y = t^2 - 1$$

denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

3. $y' = |y|^{1/2}$ ve $y(0) = -1$ başlangıç değer probleminin $t \in [0, a)$ aralığında $a \leq 2$ iken iyi tanımlı, $a > 2$ olduğunda ise iyi tanımlı olmadığını gösteriniz.

4.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

başlangıç değer problemini

(a) özdeğerleri kullanarak

(b) Laplace dönüşümünü kullanarak

çözünüz.

5. ϵ reel bir parametre olmak üzere $x' = y$, $y' = x^2 - y - \epsilon$ düzlem otonom sistemini göz önüne alınız.

(a) Kritik noktalarını bulunuz.

(b) Eğer sistemin kritik noktaları varsa, kritik noktalar civarında çözümlerin davranışını tartışınız.

(c) Çözümlerin davranışının ϵ parametresine göre nasıl değiştiğini tartışınız.

6. $c(u) \geq 0$, $g(0) = 0$ ve küçük $u \neq 0$ değerleri için $ug(u) > 0$ olmak üzere,

$$u'' + c(u)u' + g(u) = 0$$

Lienard denklemini göz önüne alınız.

(a) $u = 0$ ve $u' = 0$ kritik noktasının kararlı olduğunu gösteriniz.

(b) $c(u) = 1$ olduğunda $u = 0$ ve $u' = 0$ kritik noktasının asimptotik kararlı olduğunu gösteriniz.

7. (a)

$$x' = ye^{1+x^2+y^2}, \quad y' = -xe^{1+x^2+y^2}$$

düzlem otonom sisteminin her çözümünün periyodik olduğunu gösteriniz.

(b)

$$x' = x - x^3 - xy^2, \quad y' = y - y^3 - yx^2$$

sisteminin tek limit çembere a sahip olduğunu gösteriniz.

(c)

$$x' = x - xy^2 + y^3, \quad y' = 3y - yx^2 + x^3$$

sisteminin, $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin içinde kalan aşık olmayan periyodik bir çözümünün olmadığını gösteriniz.