MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

18.034 PROBLEM SETİ 9 ÇÖZÜM ANAHTARI

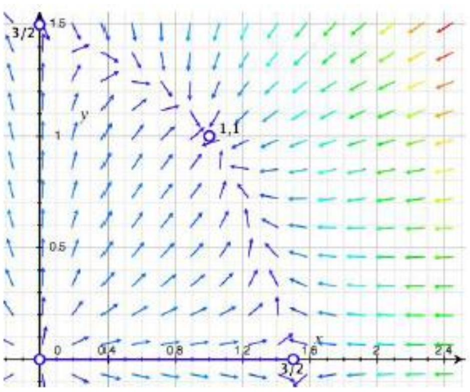
1. (a) Birkhoff-Rota, ,sayfa 135-136, Teorem 1 ve Örnek 3.

Decartes folyeleri Şekil 5.2 dedir.

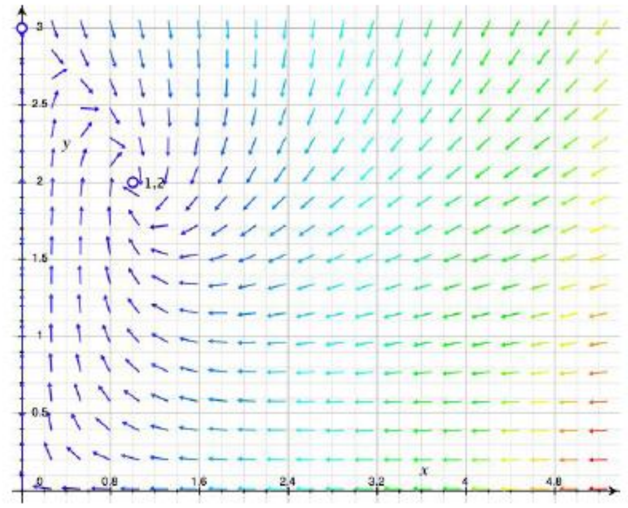
2. (a) Olmadığını kabul edelim. Bu (x_1, y_1) noktasında $f > 0, f < 0, g > 0, g < 0$ eşitsizliklerinden en az birinin sağlandığı anlamına gelir. Genelliği bozmaksızın $f(x_1, y_1) = -2a < 0$ olsun. (Diğer durumlar benzerdir). Sürekliliği kullanarak, bazı büyük $T > 0$ sayıları için $t > T$ olduğunda $f\big(x(t), y(t)\big) < -\alpha$ elde edilir. Böylece, $t > T$ için $x^{'}(t) \leq -\alpha$ ve $x(t) \leq -\alpha t + \beta$ olur. Böylece $t \to \infty$ için $x(t) \to -\infty$ olur ve $x(t) \to x_1$ ile çelişir.

(b) Genelliği bozmaksızın $x_0 = y_0 = 0$ alalım. Bazı $\delta > 0$ için $r < \delta$ diski üzerinde $F(t) = f(xt, yt)$ olsun. Ortalama Değer Teoreminden, bazı $0 < \tau < 1$ için $F(1) - F(0) = F^{'}(\tau)$ dir. Ayrıca, $F^{'}(t) = xf_x(x\tau, y\tau) + yf_y(x\tau, y\tau)$. f_x ve f_y sürekliliğinden $|f_x(x\tau, y\tau) - fx0,0<\epsilon(r)$ yazılır. Burada, $\lim r \to 0 \epsilon r=0.$ Bu nedenle, $r \to 0$ için $a \to fx(0,0)$ ve $b \to fy(0,0)$ olur. Benzer durum g fonksiyonuna uygulanır.

3. (0,0) kararsız tekil düğüm, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ve $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ eyer noktaları. (1,1) kararlı düğüm.



4. $(0,0)$ ve $(0,3)$ eyer noktaları. $(1,2)$ kararlı odak.



5. (a) Birkhoff-Rota, sayfa 153, Teorem 5.

(b) $E(x) = x^2$ Lyapunov fonksiyonu olsun. $E(0) = 0$ ve $x \neq 0$ için $E(x) > 0$ dır. $f'(0) < 0$ olduğundan $x = 0$ civarında $x \neq 0$ için $\dot{E}(x) = 2xf(x) < 0$ olur. Bu nedenle $x = 0$ asimptotik kararlıdır.

6. (a) $x = 0$ noktasına ek olarak, $x = \frac{1}{n\pi}$, $n = 1,2, \ldots$, noktaları da kritik noktalardır. $0 < |x(0)| \ll 1$ olsun, dolayısıyla büyük bazı n sayıları için $\frac{1}{(n+1)\pi} < |x(0)| < \frac{1}{n\pi}$ olur. Bu durumda, durağan olmayan çözümler kritik noktadan geçemeyeceğinden, tüm t sayıları için $\frac{1}{(n+1)\pi} < |x(t)| < \frac{1}{n\pi}$ dir. Bu nedenle, $|x(t)| < \frac{n+1}{n}|x(0)| \leq 2|x(0)|$ olduğundan $x = 0$ kararlıdır. $x_n(0) = \frac{1}{n\pi}$, $n = 1,2, \ldots$, alınız. O zaman, tüm t ler için $x_n(t) = \frac{1}{n\pi}$ dir. Bu yüzden $x = 0$ asimptotik kararlı değildir.

(b) Lineer sistem $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dir. $x(t) = a + bt$, $y(t) = b$ çözümlerdir. Böylece, $(0,0)$ kararsızdır. Lineer olmayan sistem için, $E(x,y) = x^4 + 2y^2$ alalım. $E(0,0) = 0$, ve $(x,y) \neq (0,0)$ için $E(x,y) > 0$ dir. $\dot{E}(x,y) = 4x^3(y - x^3) + 4y(-x^3) = -4x^6 \leq 0$ olduğundan $(0,0)$ kararlıdır.