

MIT AçıkDersSistemi

<http://ocw.mit.edu>

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

Bu bilgilere atıfta bulunmak veya kullanım koşulları hakkında bilgi için

<http://ocw.mit.edu/terms> web sitesini ziyaret ediniz.

### 18.034 PROBLEM SETİ 8 ÇÖZÜM ANAHTARI

1. (a)  $Au = \lambda u$  olsun. O zaman,  $u^*Au = u^*\lambda u = \lambda uu^*$ . Diğer taraftan,  $u^*A = u^*A^* = (Au)^* = \bar{\lambda} u^*$ . Dolayısıyla,  $u^*Au = \bar{\lambda} u^*u$ . Buradan,  $\lambda$  nın reel olduğu sonucuna varılır.

(b)  $u \neq 0, v \neq 0, \lambda \neq \mu; Au = \lambda u, Av = \mu v$  olsun. Yukarıdaki fikirleri kullanarak,  $v^*Au = \lambda v^*u, u^*Av = \mu u^*v$ , ve  $v^*Av = \bar{\mu} v^*u$ . Bu nedenle,  $v^*u = 0$ .

2.  $e^{At} = I + tA + \frac{t^2A^2}{2} + t^3R_1(t), e^{Bt} = I + tB + \frac{t^2B^2}{2} + t^3R_2(t)$ . Bu nedenle,

$$e^{At}e^{Bt} = I + t(A+B) + t^2\left(\frac{A^2+B^2}{2} + AB\right) + t^3R_3(t)$$

$$e^{Bt}e^{At} = I + t(A+B) + t^2\left(\frac{A^2+B^2}{2} + BA\right) + t^3R_4(t)$$

Burada  $R_1, R_2, R_3, R_4$  matris değerli sürekli fonksiyonlardır. Bu yüzden

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{At}e^{Bt} - e^{Bt}e^{At}}{t^2} = AB - BA \quad (= [A, B]).$$

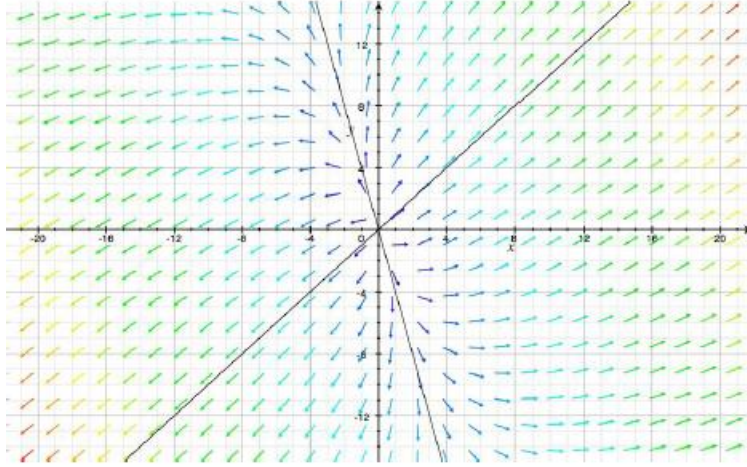
3. (a)  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$ . Cayley-Hamilton teoreminden,  $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)A - \lambda_3 I = 0$ .

(b) Cayley-Hamilton teoreminden,  $A(A^2 - I) = 0$ . Bu nedenle,  $A^{2k+1} = A$  ve  $A^{2k} = A^2$  olur.

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots \\ &= I + A\left(t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots\right) + A^2\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots\right) \\ &= I + A^2 + \frac{1}{2}A(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2}A^2(e^t + e^{-t}) \end{aligned}$$

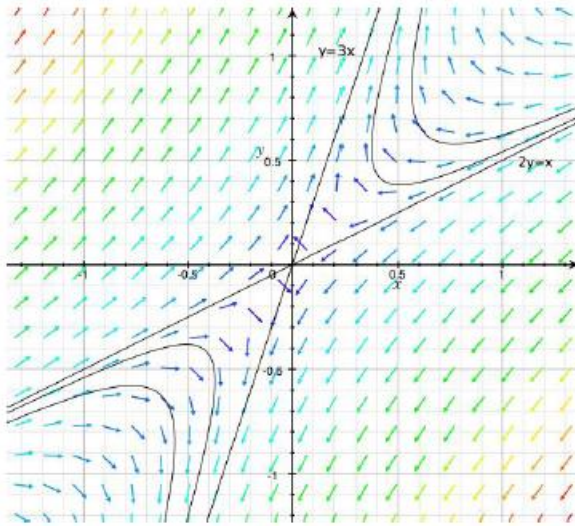
4. (a)  $P(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda - 14$ . Kararsız düğüm.

(b)  $m = \frac{4+3m}{6+m}, m^2 + 3m - 4 = 0$ . Bu nedenle,  $m = 1$  veya  $m = -4$  elde edilir.



(c)

5. (a) Eyer

(b)  $m = \frac{1}{2}$  veya  $m = 3$ 

(c)

6. Birkhoff-Rota, sayfa 50-51