MIT AçıkDersSistemi

http://ocw.mit.edu

18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

18.034 PROBLEM SETİ 7

1. Pek çok uygulamada, L_1 ve L_2 lineer diferansiyel operatörler olmak üzere, f girişi ve y çıkışı $L_2 y = L_1 f$ şeklinde ilişkilidir.

(a) Eğer $P_j, (j = 1,2)$, L_j operatörünün karakteristik polinomu ise

$$P_2(s)Y(s) = P_1(s)F(s) + P_0(s)$$

olduğunu gösteriniz. Burada $P_0(s)$, f ve y nin başlangıç koşullarına bağlı bir polinomdur.

(b) Sıfır başlangıç koşulu $W(s) = P_1(s)/P_2(s)$ transfer fonksiyonunu verir. Eğer $W(s) = \mathcal{L}[w]$ ise, y fonksiyonunu konvolusyon teoremini kullanarak ifade ediniz.

(c) Eğer P_1'in derecesi P_2'nin derecesinden küçükse, w fonksiyonunu (b) şıkkındaki gibi elde edebiliriz. Niçin? Eğer $P_1 = P_2$ ise (b) şıkkındaki formül nasıl olur?

2. Bir elektron için kütleye yükleme oranı e/m'yi belirleyen bir metot

$$mx'' + Hey' = eE, \quad my'' - Hex' = 0$$

sistemini ortaya çıkarır. $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$ başlangıç değerleri ve m, e, H, E pozitif sabitlerdir.

(a) Sistemi Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz ve (x, y) koordinatlı parçacığın yörüngesinin, $\omega = He/m$ olmak üzere,

$$x(t) = E(\omega H)^{-1}(1 - \cos\ \omega t), \qquad y(t) = E(\omega H)^{-1}(\omega t - \sin\ \omega t),$$

İle verildiğini gösteriniz. Bu eğri, yarıçapı $E(\omega H)^{-1}$ olan dairenin ürettiği bir sikloittir.

(b) Yörünge bilgisinden ve deneycinin ayarladığı E ve H değerlerinden sistem parametresi e/m nasıl saptanabilir?

3.

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

olmak üzere $Y' = AY$ diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım.

(a) Eğer $U(t)$ bir temel çözümler matrisi ve C de regüler bir matris ise, UC'nin de bir temel çözümler matrisi olduğunu gösteriniz.

(b) Eğer $V(t)$ bir temel çözümler matrisi ise, $U(t) = V(t)V(t_0)^{-1}$ matrisinin de $U(t_0) = I$ koşulunu sağlayan bir temel çözümler matrisi olduğunu gösteriniz.

(c) $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} + a_{12}y_{21} & a_{11}y_{12} + a_{12}y_{22} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|Y|$ ve $D_2 = a_{22}|Y|$ olmak üzere, $|Y|' = D_1 + D_2$ olduğunu gösteriniz. Liouville teoremini oluşturunuz.

4. (a) Eğer $(y_1(t), y_2(t))$

$$t^2 y_1' = -2ty_1 + 4y_2, \ \ ty_2' = -2ty_1 + 5y\_2$$

sisteminin bir çözümü ise, hem y_1 hem de y_2 nin

$$(t^2\phi' + 2t\phi)' = -8\phi + 5(t\phi' + 2\phi)$$

Euler denkleminin çözümleri olduğunu gösteriniz.

(b) $A = \begin{pmatrix} -2t^{-1} & 4t^{-2} \\ -2 & 5t^{-1} \end{pmatrix}$ için bir temel çözüm matrisi bulunuz.

(c) $A = \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 2t & -2 \\ t^2 + 2t & -2 \end{pmatrix}$ için bir temel çözüm matrisi elde ediniz.

5. Başlangıç değer problemini

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) özdeğerleri kullanarak çözünüz,

(b) Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.

(c) a ve b nin hangi değerleri için

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $\lim_{t\to\infty}\big(y_1(t), y_2(t)\big) = (0{,}0)$ davranışına sahiptir.

6. Hangi $(a, b, c)^T$ vektörü için

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

başlangıç değer probleminin çözümü t'ye göre periyodiktir.