18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

18.034 PROBLEM SETİ 6 ÇÖZÜM ANAHTARI

1. (a)

$$\int_0^\infty e^{-t}t^r dt = \int_0^1 e^{-t}t^r dt + \int_1^\infty e^{-t}t^r dt = I + II$$

$r > -1$ için:

$$I \leq \int_0^1 t^r dt < \infty$$
$$II \cong \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}n^r$$

(b)

$$\Gamma(r+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^r dt = e^{-t}t^r|_0^\infty + \int_0^\infty re^{-t}t^{r-1}dt \quad \text{(Kısmi integrasyon)}$$
$$= r\Gamma(r)$$
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1, \ \Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}dt = \int_0^\infty 2e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$$

(c)

$$\mathcal{L}[t^r] = \int_0^\infty e^{-t}t^r dt = \int_0^\infty e^{-u}(\,u/s)^r(1/s)du = \frac{1}{s^{r+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^r du = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}$$

2. (a)

$$\mathcal{L}[h(t-c)\sin t] = \int_0^\infty e^{-st}\sin t\, dt$$
$$= e^{-sc}\,\mathcal{L}[\sin(t+c)]$$
$$= e^{-sc}\,\mathcal{L}[\sin t\cos c + \cos t\sin c]$$
$$= e^{-sc}\,\frac{\cos c + s\sin c}{s^2+1}.$$

Dönüşüm alarak,

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2+\omega^2}\left(\frac{1}{s^2+1} - e^{-sc}\,\frac{\cos c + s\sin c}{s^2+1}\right)$$
$$= \frac{1}{\omega^2-1}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+\omega^2})(1 - e^{-sc}\,(\cos c + s\sin c)\right).$$

Dolayısıyla,

$$y(t) = \frac{1}{\omega^2-1}(\sin t - \frac{\sin \omega t}{\omega}$$
$$- h(t-c)\left(\sin t - \frac{\sin \omega(t-c)}{\omega}\cos c - \cos \omega(t-c)\sin c\right).$$

(b) $y(c) = \frac{1}{\omega^2-1}\left(\sin c - \frac{\sin \omega c}{\omega}\right)$, $y'(c) = \frac{1}{\omega^2-1}(\cos c - \cos \omega c)$.

(c) $y''(c+) - y''(c-) = \frac{-1}{\omega^2-1}(-\sin c + \omega^2 \sin c)$.

3. $f_0(t) = \sin t, \quad 0 \le t < \pi$. $\mathcal{L}[f_0] = \frac{1}{s^2+1}(1+e^{-\pi s})$, $\mathcal{L}[f] = \frac{\mathcal{L}[f_0]}{1-e^{-\pi s}} = \frac{1}{s^2+1}\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}$

Alternatif olarak, $f(t) = \sin t + 2\sum_{n=1}^{\infty} h(t-n\pi)\sin(t-n\pi)$ ifadesinde terim terim hesaplayınız.

4. (a) Dönüşüm alarak, $s^2\mathcal{L}[y] - (as+b) + \mathcal{L}[y] = Ae^{-cs}$ elde edilir. Bu nedenle,

$$y(t) = Ah(t-c)\sin(t-c) + a\cos t + b\sin t$$

olur.

(b) $y(c) = 0$ gerekliliğinin sebebi şudur: $y(c) = 0$ olduğu noktada, impuls türevi kontrol edebilir ve $y'(c) = 0$ ye indirgeyebilir. O zaman, teklik nedeniyle, $t > c$ için $y(t) = 0$ olur. Fakat $y(c) \neq 0$ olduğu noktada, impulsın hiçbir seçimi $y'(c) = 0$'ı vermeyecektir. Genel olarak, a, b sabitler olmak üzere $y'' + ay' + by = f(t)$ denkleminde $f(t) \to f(t) + \delta(t)$ etkisi $y'(0) \to y'(0) + c$ etkisi ile aynıdır.

5. (a) $\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} f(s,t)ds = f(t,t) + \int_{t_0}^{t}\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)dt$.

(b) Dönüşüm alarak,

$$\mathcal{L}[y] + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}[y] = -\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+4},$$

veya

$$\mathcal{L}[y] = -\frac{1}{2}\frac{s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

Bu nedenle,

$$y(t) = \frac{1}{6}\sin t + \frac{1}{3}\sin 2t$$

6. (a) $\mathcal{L}[y''] = -\frac{d}{ds}(s^2Y(s)) = s^2Y'(s) - 2sY(s)$

(b)

$$\frac{Y'}{Y} = -\frac{s}{s^2+1},$$

bu yüzden

$$Y(s) = c\,(1+s^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$(1+s^2)^{-\frac{1}{2}}$ için Binom serisini kullanarak,

$$Y(s) = \frac{c}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\, s^{-2n} = c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(2n)!}{s^{2n+1}}.$$

$\mathcal{L}[t^{2n}] = \frac{(2n)!}{s^{2n+1}}$ olduğundan,

$$y(t) = c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Açık olarak, $y(0) = 0,\ \ y^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k = 2n+1 \\ \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}, & k = 2n \end{cases}$