18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

2009 Bahar

18.034 PROBLEM SETİ 6

1. (t^r nin Laplace dönüşümü). Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(r+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^r dt$$

integrali ile tanımlanır.

(a) Genelleştirilmiş integralin tüm $r > -1$ değerleri için yakınsadığını gösteriniz.

(b)$r > 0$ için $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$, $\Gamma(1)$ =1 ve $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ olduğunu gösteriniz.

(c) $r > -1$ için $\Gamma(t^r) = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}, s > 0$ olduğunu gösteriniz.

2. (a) $c > 0$ ve $\omega^2 \neq 1$ için

$$y'' + \omega^2 y = h(t)\sin t - h(t-c)\sin t, \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

(b) $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ olduğunu gösteriniz. y ve y' nün $t = c$ de sürekli olduğunu gösteriniz.

(c) $y''(c+) - y''(c-) = -\sin c$ ve $y''(c+) - y''(c-) = 0$ ancak ve ancak $c = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ olduğunu gösteriniz. Bu davranış $h(t-c)\sin t$ fonksiyonunun c noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşulun $\sin c = 0$ olmasıyla açıklanır.

3. Rektifiye edilmiş* $f(t) = |\sin t|$ dalgasının Laplace dönüşümünü bulunuz.

4. (a) A, a, b, c sabitler ve $c > 0$ olmak üzere

$$y'' + y = A\delta(t-c), \quad y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

(b) $t \geq c$ için $y(t) = 0 \Leftrightarrow y(c) = 0$ ve

$$A = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \mathrm{a}\sin c \geq b\cos c; \qquad A = -\sqrt{a^2+b^2}, \qquad \mathrm{a}\sin c \leq b\cos c$$

olduğunu gösteriniz.

Yorumlarsak, A genlikleri ve c impulsı salınımı yok eder.

5. (Volterra integral denklemi)

* Doğru akımı tanımlar.

$$y(t) + \int_0^t (t-s)y(s)ds = -\frac{1}{4}\sin 2t$$

integral denklemini göz önüne alınız.

(a) Yukarıdaki integral denklemin

$$y^{''} + y = \sin 2t, \quad y(0) = 0, \;\; y^{'}(0 == -\frac{1}{2}$$

başlangıç değer problemine eşdeğer olduğunu gösteriniz.

(b) Laplace dönüşümünü kullanarak integral denklemi çözünüz.

6. Sıfırıncı mertebeden

$$ty^{''} + y^{'} + ty = 0$$

Bessel denklemini göz önüne alalım. $t = 0$ noktasının aykırı bir nokta ve bu nedenle çözümlerin $t \to 0$ için sınırsız olabileceğine dikkat ediniz. Bununla birlikte, $t = 0$ da kendisi ve türevleri sonlu kalan çözümlerin var olup olmadığını saptamaya çalışalım.

(a) $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$ in $(1+s^2)Y^{'}(s) + sY(s) = 0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

(b) $(1+s^2)^{-1/2}$ fonksiyonunun $s > 1$ için Binom serisini kullanarak $y(t)$ nin sıfırıncı mertebeden birinci tip Bessel foksiyonu olarak adlandırılan

$$y(t) = c\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

olduğunu gösteriniz. $y(0) = 1$ ve y nin $t = 0$ da her mertebeden sonlu türevlere sahip olduğunu gösteriniz.