18.034 İleri Diferansiyel Denklemler

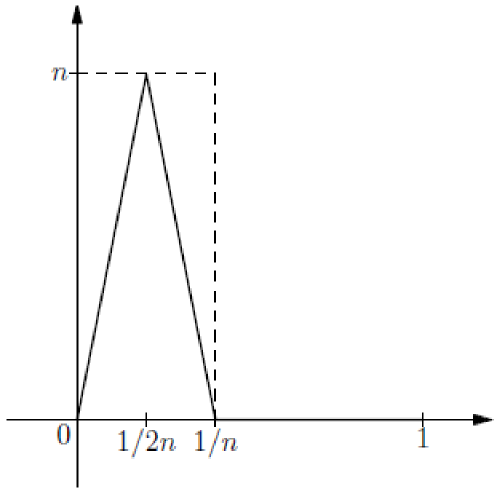
2009 Bahar

18.034 PROBLEM SETİ 5 ÇÖZÜM ANAHTARI

1. (a) $[a, b]$ aralığında $f_n \to f$ düzgün yakınsadığından, verilen $\epsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N \in \mathbb{Z}_+$ sayısı vardır, öyleki $t \in [a, b]$ ve $n \geq N$ için $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon/(b-a)$ dir. $n \geq N$ için,

$$\left| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt < \epsilon$$

(b) $f_n(t)$



ile verilir.

$$\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{2} \text{ for all } n,$$

$$\int_0^1 f(t)dt = 0$$

2. Yerel varlık teorimi ispatında,

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq ML^{k-1} \frac{|t - t_0|}{k!} \quad \text{for } k = 1,2, \dots$$

$$\begin{aligned} |x(t) - x_n(t)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k(t) - x_{k-1}(t) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k(t) - x_{k-1}(t)| \\ &\leq \frac{M}{L} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(LT)^k}{k!} \end{aligned}$$

$$= ML^n \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} e^{LT}$$

3. (a) ($\Rightarrow$) $F(t) = f(t, \phi(t))$ olsun ve $x'' = F(t)$, $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1$ problemini çözünüz.

($\Leftarrow$) $\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} f(s,t)ds = f(t,t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)ds$

(b)

(1)
$$|x_n(t) - x_0| = |x_1||t - t_0| + \left|\int_{t_0}^{t}(t-s)f\big(s, x_{n-1}(s)\big)ds\right|$$
$$\leq |x_1||t-t_0| + M\int_{t_0}^{t}|t-s|ds$$
$$= |x_1||t-t_0| + \frac{M}{2}|t-t_0|^2$$
$$\leq B|t-t_0|$$

olduğunu göstererek yerel varlık teoremini tekrar ediniz.

(2)
$$|x_n(t) - x_{n-1}|$$
$$\leq \int_{t_0}^{t}(t-s)\big|f\big(s, x_{n-1}(s)\big) - f\big(s, x_{n-2}(s)\big)\big|ds$$
$$\leq \int_{t_0}^{t}(t-s)|x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)|\,ds$$
$$\leq ML^{n-1}\frac{|t-t_0|^{2n}}{(2n)!}$$

(L Lipschitz sabitidir.)

4. (a)

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sqrt{s}}{x}\frac{2x}{s}\,dx, \quad x^2 = st$$
$$= \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi/s}$$

(b)

$$\mathcal{L}[\sqrt{t}] = \int_0^\infty e^{-st}\sqrt{t}\,dt = \sqrt{t}\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \quad \text{(kısmi integrasyon)}$$
$$= 0 + \frac{1}{2s}\int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}s^{3/2}$$

5. (a) $t > s$ için $t^2 - st > 0$ olduğundan, s ne kadar büyük olursa olsun,

$$\int_0^\infty e^{t^2-st}\,dt > \int_s^\infty e^{t^2-st}\,dt > \int_s^\infty e^0\,dt = \infty$$

olduğundan, her reel s değeri için $\mathcal{L}\left[e^{t^2}\right] = \int_0^\infty e^{t^2-st}\,dt$ mevcut değildir.

(b) $\mathcal{L}\left[\frac{1}{t^k}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{t^k}\,dt,\ \ (s > 0).$ Buradaki problem $t = 0$ dadır. $t = 0$ çivarında $e^{-st} \approx 1$ ve bu nedenle

$$\int_0^\tau e^{-st}\frac{1}{t^k}\,dt \gtrsim \int_0^\tau \frac{1}{t^k}\,dt = f(x) = \begin{cases} \dfrac{t^{1-k}}{1-k}\Big|_0^\tau, & k \neq 1 \\ \log t\,\Big|_0^\tau, & k = 1 \end{cases}.$$

Bu yüzden, $k < 1$ için $\mathcal{L}\left[\frac{1}{t^k}\right]$ mevcuttur.

6. (a) $5\cos 2t - 3\sin 2t + 2$

(b) $e^{-t/3}\cos\sqrt{2}\,t$