8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

IV. Tedirgemeli Renormalizasyon Gurubu

IV.A Gaussiyan Modelde Beklenen Değerler

Landau-Ginzburg modelini, Gaussiyan modelin bir tedirgemesi olarak inceleyebilir miyiz? Özellikle, sıfır manyetik alanda,

$$\beta\mathcal{H} = \beta\mathcal{H}_0 + \mathcal{U} \equiv \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{t}{2}m^2 + \frac{K}{2}(\nabla m)^2 + \frac{L}{2}(\nabla^2 m)^2 + \cdots\right] + u\int d^d\mathbf{x} m^4 + \cdots \tag{IV.1}$$

ifadesini inceleyeceğiz.

Tedirgenmemiş Gaussiyan Hamiltoniyen, birbirinden bağımsız Fourier modlarına ayrıştırılabilir:

$$\beta\mathcal{H}_0 = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}}\frac{t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots}{2}|m(\mathbf{q})|^2 \equiv \int\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots}{2}|m(\mathbf{q})|^2 \tag{IV.2}$$

Etkileşmeler, normal modları birbirine karıştırırlar, ve

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= u\int d^d\mathbf{x} m(\mathbf{x})^4 + \cdots \\
&= u\int d^d\mathbf{x}\int\frac{d^d\mathbf{q}_1 d^d\mathbf{q}_2 d^d\mathbf{q}_3 d^d\mathbf{q}_4}{(2\pi)^{4d}} e^{-i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4)} m_\alpha(\mathbf{q}_1)m_\alpha(\mathbf{q}_2)m_\beta(\mathbf{q}_3)m_\beta(\mathbf{q}_4) \\
&\quad + \cdots
\end{aligned} \tag{IV.3}$$

burada, α ve β üzerinden toplam açıkça yazılmamıştır. $\mathbf{x}$ üzerinden integral, $\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4 = 0$ olmasını sağlar ve

$$\mathcal{U} = u\int\frac{d^d\mathbf{q}_1 d^d\mathbf{q}_2 d^d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^{3d}} m_\alpha(\mathbf{q}_1)m_\alpha(\mathbf{q}_2)m_\beta(\mathbf{q}_3)m_\beta(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) + \cdots \tag{IV.4}$$

Gaussian ağırlıkların değişkesinden, kesikli modlu sonlu boyutlu bir sistemin, iki-nokta beklenen değerleri kolayca

$$\langle m_\alpha(\mathbf{q})m_\beta(\mathbf{q}')\rangle_0 = \frac{\delta_{\mathbf{q},-\mathbf{q}'}\delta_{\alpha,\beta}V}{t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots} \tag{IV.5}$$

olarak elde edilir. Sonsuz boyut limitinde, spektrum sürekli hale gelir, ve denklem IV.5

$$\langle m_\alpha(\mathbf{q})m_\beta(\mathbf{q}')\rangle_0 = \frac{\delta_{\alpha,\beta}(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{t + Kq^2 + Lq^4 + \cdots} \tag{IV.6}$$

halini alır. 0 alt sembolü, beklenen değerlerin tedirgenmemiş (Gaussiyan) Hamiltoniyen'e göre alındığını belirtir. m'lerin herhangi bir çarpımını içeren beklenen değerler

$$\left\langle \exp\left[\sum_i a_i m_i\right]\right\rangle_0 = \exp\left[\sum_{i,j} \frac{a_i a_j}{2}\langle m_i m_j\rangle_0\right] \tag{IV.7}$$

özdeşliğinden başlayarak hesaplanabilir, ki bu özdeşlik Gaussiyen dağılımlı herhangi bir değişken kümesi $\{m_i\}$ için geçerlidir. (Bu, 'kareye tamamlayarak' kolayca görülür.) Denklemin iki tarafını da $\{a_i\}$'lerin kuvvetleri cinsinden açarsak,

$$\begin{aligned} 1 &+ a_i\langle m_i\rangle_0 + \frac{a_i a_j}{2}\langle m_i m_j\rangle_0 + \frac{a_i a_j a_k}{6}\langle m_i m_j m_k\rangle_0 + \frac{a_i a_j a_k a_l}{24}\langle m_i m_j m_k m_l\rangle_0 + \cdots = \\ 1 &+ \frac{a_i a_j}{2}\langle m_i m_j\rangle_0 + \frac{a_i a_j a_k a_l}{24}(\langle m_i m_j\rangle_0\langle m_k m_l\rangle_0 + \langle m_i m_k\rangle_0\langle m_j m_l\rangle_0 + \langle m_i m_k\rangle_0\langle m_j m_l\rangle_0) \\ &+ \cdots \end{aligned} \tag{IV.8}$$

elde ederiz. Yukarıdaki denklemin iki tarafında da $\{a_i\}$'lerin kuvvetlerini eşitlersek,

$$\left\langle \prod_{i=1}^{\ell} m_i \right\rangle_0 = \begin{cases} 0 & \ell \text{ tek ise} \\ \text{bütün ikili birleştirmeler üzerinden toplam} & \ell \text{ çift ise} \end{cases} \tag{IV.9}$$

elde ederiz. Bu sonuç *Wick Teoremi* olarak bilinir, ve mesela

$$\langle m_i m_j m_k m_l\rangle_0 = \langle m_i m_j\rangle_0\langle m_k m_l\rangle_0 + \langle m_i m_k\rangle_0\langle m_j m_l\rangle_0 + \langle m_i m_k\rangle_0\langle m_j m_l\rangle_0$$

IV.B Tedirgeme Kuramında Beklenen Değerler

$\mathcal{U}$ etkileşimleri olduğunda, herhangi bir $\mathcal{O}$ operatörünün beklenen değeri, tedirgeme kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{O}\rangle &= \frac{\int \mathcal{D}\vec{m}\mathcal{O}e^{-\beta\mathcal{H}_0-\mathcal{U}}}{\int \mathcal{D}\vec{m}e^{-\beta\mathcal{H}_0-\mathcal{U}}} = \frac{\int \mathcal{D}\vec{m}e^{-\beta\mathcal{H}_0}\mathcal{O}[1-\mathcal{U}+\mathcal{U}^2/2-\cdots]}{\int \mathcal{D}\vec{m}e^{-\beta\mathcal{H}_0}[1-\mathcal{U}+\mathcal{U}^2/2-\cdots]} \\ &= \frac{Z_0[\langle\mathcal{O}\rangle_0 - \langle\mathcal{O}\mathcal{U}\rangle_0 + \langle\mathcal{O}\mathcal{U}^2\rangle_0/2 - \cdots}{Z_0[1-\langle\mathcal{U}\rangle_0 + \langle\mathcal{U}^2\rangle_0/2-\cdots]} \end{aligned} \tag{IV.10}$$

Paydayının tersini $\mathcal{U}$'nun kuvvetleri cinsinden açarsak,

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{O}\rangle &= \left[\langle\mathcal{O}\rangle_0 - \langle\mathcal{O}\mathcal{U}\rangle_0 + \frac{1}{2}\langle\mathcal{O}\mathcal{U}^2\rangle_0 - \cdots\right]\left[1 + \langle\mathcal{U}\rangle_0 + \langle\mathcal{U}\rangle_0^2 - \frac{1}{2}\langle\mathcal{U}^2\rangle_0 - \cdots\right] \\ = &\ \langle\mathcal{O}\rangle_0 - (\langle\mathcal{O}\mathcal{U}\rangle_0 - \langle\mathcal{O}\rangle_0\langle\mathcal{U}\rangle_0) + \frac{1}{2}(\langle\mathcal{O}\mathcal{U}^2\rangle_0 - 2\langle\mathcal{O}\mathcal{U}\rangle_0\langle\mathcal{U}\rangle_0 + 2\langle\mathcal{O}\rangle_0\langle\mathcal{U}\rangle_0^2 - \langle\mathcal{O}\rangle_0\langle\mathcal{U}^2\rangle_0) \\ &+ \cdots \equiv \sum_{n+0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\langle\mathcal{O}\mathcal{U}^n\rangle_0^c \end{aligned} \tag{IV.11}$$

Bağlantılı ortalamalar, açılımın değişik mertebelerinde ortaya çıkan, tedirgenmemiş beklenenen değerlerin birleşimi olarak tanımlanmıştır. Diyagramlarla gösterimde, ve takip eden örnekte, önemleri ortaya çıkacaktır.

Landau-Ginzburg modelinde, iki nokta bağdaşıklık fonksiyonunu u parametresinde birinci mertebeye kadar hesaplayalım. [Önemsizliklerini göze aldığımızdan, daha yüksek mertebeden terimleri gözardı edeceğiz, ve sadece en düşük Gaussiyan terimleri tutacağız.] Denklem IV.4'ü, denklem IV.11'e yerleştirdiğimizde

$$\begin{aligned}\langle m_\alpha(\mathbf{q})m_\beta(\mathbf{q}')\rangle = \langle m_\alpha(\mathbf{q})m_\beta(\mathbf{q}')\rangle_0 - u\int \frac{d^d\mathbf{q}_1 d^d\mathbf{q}_2 d^d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^{3d}} \\ [\langle m_\alpha(\mathbf{q})m_\beta(\mathbf{q}')m_i(\mathbf{q}_1)m_i(\mathbf{q}_2)m_j(\mathbf{q}_3)m_j(-\mathbf{q_1}-\mathbf{q_2}-\mathbf{q_3})\rangle_0 - \\ \langle m_\alpha(\mathbf{q})m_\beta(\mathbf{q}')\rangle_0\langle m_i(\mathbf{q}_1)m_i(\mathbf{q}_2)m_j(\mathbf{q}_3)m_j(-\mathbf{q_1}-\mathbf{q_2}-\mathbf{q_3})\rangle_0] + \mathcal{O}(u^2)\end{aligned} \tag{IV.12}$$

elde ederiz. $\langle\mathcal{O}\mathcal{U}\rangle_0$'yu hesaplamak için, altı m'nin çarpımının tedirgenmemiş beklenen değerine ihtiyacımız var. Bu, denklem IV.9 kullanılarak, bütün çiftli eşleşmelerin, toplam 15 tane, toplamı olarak hesaplanabilir. Üç eşleşme, ilk önce m_α ile m_β'yı, sonra da geri kalan dört m'leri eşleyerek elde edilir. Açıkça bu eşlemeler, $\langle\mathcal{O}\rangle_0\langle\mathcal{U}\rangle_0$ ile elde edilenlerle tam olarak birbirini götürürler. Geriye kalan eşleşmeler, sadece $\mathcal{O}$'yu $\mathcal{U}$ ile birleştirenlerdir. Bu sadeleşme, bütün mertebelerde olur, ve $\langle\mathcal{O}\mathcal{U}^n\rangle\rangle_0^c$, sadece bütün $n+1$ operatörün, eşleşmelerle bağlandığı katkıları içerir. $\langle\mathcal{O}\mathcal{U}\rangle_0$'daki kalan 12 eşleşme, iki sınıfa ayrılır:

(i) 4 çiftleme, m_α ve m_β'nin aynı indekse sahip m'lerle eşleşmesini içerir, yani

$$\begin{aligned}&\langle m_\alpha(\mathbf{q})m_i(\mathbf{q}_1)\rangle_0\langle m_\beta(\mathbf{q}')m_i(\mathbf{q}_2)\rangle_0\langle m_j(\mathbf{q}_3)m_j(-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\rangle_0 \\ &= \frac{\delta_{\alpha i}\delta_{\beta i}\delta_{jj}(2\pi)^{3d}\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1)\delta^d(\mathbf{q}'+\mathbf{q}_2)\delta^d(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)}{(t+Kq^2)(t+Kq'^2)(t+Kq_3^2)}\end{aligned} \tag{IV.13}$$

ki burada denklem IV.6'yı kullandık. i ve j'ler üzerinden toplayıp, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ ve $\mathbf{q}_3$ üzerinden integralleri aldığımızda, bu terimlerin katkısı

$$-4u\frac{n\delta_{\alpha\beta}(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}')}{(t+Kq^2)^2}\int\frac{d^d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kq_3^2} \tag{IV.14}$$

olur.

(ii) 8 çiftleme, m_α ve m_β'nın farklı indekse sahip m'lerle eşleşmesini içerir, yani

$$\begin{aligned}&\langle m_\alpha(\mathbf{q})m_i(\mathbf{q}_1)\rangle_0\langle m_\beta(\mathbf{q}')m_j(\mathbf{q}_3)\rangle_0\langle m_i(\mathbf{q}_2)m_j(-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\rangle_0 \\ &= \frac{\delta_{\alpha i}\delta_{\beta j}\delta_{ij}(2\pi)^{3d}\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}_1)\delta^d(\mathbf{q}'+\mathbf{q}_3)\delta^d(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_3)}{(t+Kq^2)(t+Kq'^2)(t+Kq_2^2)}\end{aligned} \tag{IV.15}$$

Bütün indeksler üzerinden toplayıp, momentumlar üzerinden integralleri aldığımızda, gelen katkı

$$-8u\frac{\delta_{\alpha\beta}(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}')}{(t+Kq^2)^2}\int\frac{d^d\mathbf{q}_2}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kq_2^2} \tag{IV.16}$$

olarak elde edilir. Katkıların ikisini de topladığımızda,

$$\langle m_\alpha(\mathbf{q})m_\beta(\mathbf{q}')\rangle = \frac{\delta_{\alpha\beta}(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}')}{t+Kq^2}\left[1-\frac{4u(n+2)}{t+Kq^2}\int\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kk^2}+\mathcal{O}(u^2)\right] \tag{IV.17}$$

elde ederiz.

IV.C Tedirgeme Kuramını Diyagramlarla Gösterme

Tedirgeme kuramının yüksek mertebelerinde hesaplar daha karışık bir hal alır. Bütün olası eşlemeleri takip edebilmek için, diyagramlara dayalı bir gösterim kullanabiliriz. ℓ-noktalı beklenen değeri $\langle\prod_{i=1}^{\ell} m_{\alpha_i}(\mathbf{q}_i)\rangle$ hesaplayabilmek için, u'da $p$inci mertebede, aşağıdaki kuralları takip edin:

(1) İstenen bağdaşıklık fonksiyonunun koordinatlarına karşılık gelen ve $(\mathbf{q}_i, \alpha_i)$ ile işaretlenmiş ℓ tane *dış nokta* çizin. *İç* momentum ve indekslerle işaretlenmiş, mesela $\{(\mathbf{k}_1, i), (\mathbf{k}_2, i), (\mathbf{k}_3, j), (\mathbf{k}_4, j)\}$, herbiri 4 ayaklı p *köşe* çizin. Dört ayak birbirine özdeş olmadığı için, dört noktalı köşe, noktalı çizgi ile birbirine bağlanmış iki katı dal ile gösterilir. (Yüksek mertebe etkileşimlere genelleştirilmesi apaçıktır.)

(2) Grafikteki her nokta, bir $m_{\alpha_i}(\mathbf{q}_i)$ çarpanına karşılık gelir, ve çarpımın tedirgenmemiş ortalaması Wick kuramı kullanılarak hesaplanır. Bu, bütün dış ve iç noktaları *ikili guruplar olarak*, birbirine bağlayarak elde edilir, bu bir noktayı başka bir noktaya, topolojik olarak birbirinden bağımsız her şekilde doğrularla birleştirilerek yapılır (asağıdaki #5'e bakın).

(3) Bu grafiklerin cebirsel değeri söyle hesaplanır: **(i)** Bir çift noktayı birbirine bağlayan bir doğru, iki nokta ortalamasını gösterir[1]; yani $(\mathbf{q}, \alpha) \leftrightarrow (\mathbf{q}', \beta)$ bağı, $\delta_{\alpha\alpha'}(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}')/(t+Kq^2)$ katkısı verir; **(ii)** Herhangi bir köşe $u(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4)$ ile gösterilir (delta fonksiyonu, enerji korunumunu sağlar.)

(4) $4p$ iç momentumları $\{\mathbf{k}_i\}$ üzerinden integral al, ve $2p$ iç indeksler üzerinden topla. Bu aşamada, her kapalı bir ilmeğin $\delta_{ii} = n$ çarpanı getirdiğine dikkat edin.

(5) Numerik bir çarpan

$$\frac{(-1)^p}{p!} \times \text{ aynı toplolojiyi veren farklı eşlemelerin sayısı}$$

İlk katkı, üstelin açılımından gelir; ikincisi ise sadece simetri ile birbirlerinden alınan grafiklerin aynı sonucu verdiklerini, ve bir kere hesaplanabileceklerini söyler.

(6) Kümülantlar hesaplanırken, sadece tamamen bağlantılı diyagramların (bağımsız parçaları olmayan) katılması gerekir. Bu büyük bir basitleştirmedir.

IV.D Alınganlık

Denklem IV.17'deki düzeltme teriminin tedirgemesiz değere benzer olması kaza değildir. Bunun sebebi, iki nokta bağdaşıklık fonksiyonunun simetriler tarafından sınırlandırılmış olmasıdır, ki bu

$$\langle m_\alpha(\mathbf{q})m_\beta(\mathbf{q}')\rangle = \int d^d\mathbf{x}\int d^d\mathbf{x}' e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{x}'}\langle m_\alpha(\mathbf{x})m_\beta(\mathbf{x}')\rangle \tag{IV.18}$$

[1] Kuantum alan kuramının ilk formülasyonundan, iki noktayı birbirine bağlayan çizgiye genelde *ilerletici* denir. Bu bağlamda, çizgi, bir parçacığın zamanda, dünya çizgisini gösterirken $\mathcal{U}$ parçacıklar arası bir 'etkileşim'dir. Aynı sebepten dolayı, Fourier indeksine 'momentum' denir

ifadesinden de görülebilir. Gerçek uzaydaki iki nokta bağdaşıklık fonksiyonunun öteleme ve döndürme simetrisi olması gerekir (yüksek sıcaklık fazında), ve $\langle m_\alpha(\mathbf{x})m_\beta(\mathbf{x}')\rangle = \delta_{\alpha\beta}\langle m_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}')m_1(\mathbf{0})\rangle$. Kütle merkezi ve göreli koordinatlara dönüştürdüğümüzde, yukarıdaki integral

$$\begin{aligned}&\langle m_\alpha(\mathbf{q})m_\beta(\mathbf{q}')\rangle = \\ &\int d^d\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{x}'}{2}\right)d^d(\mathbf{x}-\mathbf{x}')e^{i(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{x}')/2}e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{q}')/2}\delta_{\alpha\beta}\langle m_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}')m_1(\mathbf{0})\rangle \\ &\equiv (2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\delta_{\alpha\beta}S(q)\end{aligned} \tag{IV.19}$$

burada

$$S(q) = \langle|m_1(\mathbf{q})|^2\rangle = \int d^d\mathbf{x}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\langle m_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}')m_1(\mathbf{0})\rangle \tag{IV.20}$$

ifadesi saçılma deneylerinde gözlemlenen niceliktir (bkz. II.D)

Denklem IV.17'den

$$S(q) = \frac{1}{t+Kq^2}\left[1-\frac{4u(n+2)}{t+Kq^2}\int\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kk^2}+\mathcal{O}(u^2)\right] \tag{IV.21}$$

elde ederiz. Ters niceliğin açılımını incelemek faydalıdır

$$S(q)^{-1} = t+Kq^2+4u(n+2)\int\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kk^2}+\mathcal{O}(u^2) \tag{IV.22}$$

Yüksek sıcaklıktaki fazda, denklem IV.20, $S(q)$'nun $q\to 0$ limitinde manyetik alınganlığa eşit olduğunu gösterir. Bundan dolayı, $S(q)$ bazen $\chi(q)$ olarak gösterilir. Denklem IV.22'den, ters alınganlık

$$\chi^{-1}(t) = t+4u(n+2)\int\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kk^2}+(u^2) \tag{IV.23}$$

olarak verilir. $t=0$'da alınganlık artık ıraksamaz, çünkü

$$\chi^{-1}(0) = 4u(n+2)\int\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{Kk^2} = \frac{4(n+2)u}{K}\frac{S_d}{(2\pi)^d}\int_0^\Lambda dk k^{d-3} = \frac{4(n+2)u}{K}K_d\left(\frac{\Lambda^{d-2}}{d-2}\right) \tag{IV.24}$$

sonlu bir sayıdır. Bunun sebebi, u'nun varlığında, kritik sıcaklığın negatif bir değere indirgenmesidir. Değişmiş kritik nokta, $\chi^{-1}(t_c)=0$ koşulunda bulunabilir, ve denklem IV.23'den, u mertebesine kadar,

$$t_c = -4u(n+2)\int\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{t_c+Kk^2} \approx -\frac{4u(n+2)K_d\Lambda^{d-2}}{(d-2)K} < 0 \tag{IV.25}$$

Taşınmış kritik noktada, tedirgenmiş alınganlık nasıl ıraksar? Denklem IV.23'den

$$\begin{aligned} \chi^{-1}(t) - \chi^{-1}(t_c) &= t - t_c + 4u(n+2) \int \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{t + Kk^2} - \frac{1}{t_c + Kk^2} \right) \\ &= (t - t_c) \left[1 - \frac{4u(n+2)}{K^2} \int \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(k^2 + (t-t_c)/K)} + \mathcal{O}(u^2) \right] \end{aligned} \tag{IV.26}$$

(İlk eşitlikten, ikinciye geçerken, t_c'nin konumunu, bir paydadan, diğerine aktardık. $t_c = \mathcal{O}(u)$ olduğu için, böyle bir değişimden gelen düzeltmeler ancak $\mathcal{O}(u^2)$'de ortaya çıkar.) Son integralin boyutu $\left[k^{d-4}\right]$'tür. $d > 4$ için, en büyük momentum tarafından belirlenir, ve $K_d\Lambda^{d-4}$ şeklinde ölçeklenir. $2 < d < 4$ için, integral iki limitte de sonludur. Dolayısıyla, şiddeti $\xi^{-1} = \sqrt{(t-t_c)/K}$ momentum ölçeği ile belirlenir, ki bu, integrali boyutsuz yapmak için kullanılabilinir. Bundan dolayı, bu boyutlarda

$$\chi^{-1}(t) = (t - t_c) \left[1 - \frac{4u(n+2)}{K^2} c \left(\frac{K}{t - t_c} \right)^{2-d/2} + \mathcal{O}(u^2) \right] \tag{IV.27}$$

burada c bir sabittir. $d < 4$ için, u mertebesindeki düzeltme terimi, faz geçişinde, ξ'nin $\gamma = 1$ olan tedirgenmemiş tekilliğini maskeleyerek ıraksar. Bu sebeple, alıngalığın $d < 4$'teki ıraksamasını tanımlamak için, doğasından dolayı tedirgeme kuramı uygulanamaz. Aynı durum, herhangi bir başka niceliği tedirgemeyle hesaplarken de geçerlidir. u'yu tedirgeme parametresi olarak kabul ederek başlamış olsak da, boyutsuz olmadığını fark etmemiz önemlidir; u/K^4'ün boyutu (uzunluk)$^{d-4}$'tür. Herhangi bir niceliğin tedirgeme serisi $X(t,u) = X_0(t)\left[1 + f(ua^{4-d}/K^2, u\chi^{4-d}/K^2)\right]$ şeklini alır, burada f bir kuvvetlerin serisidir. İki uzunluk ölçeği a ve ξ, boyutsuz değişkenler oluşturmak için kullanılabilir. ξ' kritik nokta yakınında ıraksadığı için, tedirgeme serisinin doğasından gelen bir başarısızlığı vardır. Etkin (boyutsuz) tedirgeme parametresi t_c'de ıraksar ve küçük değildir.