

MIT Açık Ders Malzemesi
<http://ocw.mit.edu>

8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

Bu malzemeye atıfta bulunmak ve Kullanım Şartlarımızla ilgili bilgi almak için
<http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://tuba.acikders.org.tr> sitelerini ziyaret ediniz.

VIII.D Dengedeki Sistemlerde Genel Ölçek Değişmezliği

Sahiller ve nehir ağları gibi karmaşık uzamsal desenler ve yapılarla dolu bir dünyada yaşıyoruz. Benzer çeşitlilikte, direnç salınımları, kum saatinden akan kum, ve hatta trafik ve borsa hareketlerinde olduğu gibi, “1/f” gürültüsü gösteren zamansal süreçler de vardır. Bu olguların doğal uzunluk ve zaman ölçekleri yoktur ve ölçek değişmezliği ve öz benzerlik gösterirler. Ölçek bağımsız sistemlerin mekansal özellikleri *fraktal* geometrisi kullanılarak karakterize edilebilirler [1]. Bu bölümde, bu tür ölçek bağımsız desenlere yol açan dinamik süreçleri araştıracağız.

İlgilendiğimiz sistemin, $\mathcal{P}[m]$ olasılığı olan skalar $m(\mathbf{x})$ alanı ile tasvir edildiğini varsayalım. Ölçek değişmezliği, $m(\mathbf{x})$ 'in bağıdaşıklık fonksiyonları, iki nokta bağıdaşıklığı gibi, $C(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \equiv \langle m(\mathbf{x})m(\mathbf{y}) \rangle - \langle m(\mathbf{x}) \rangle \langle m(\mathbf{y}) \rangle$, incelenerek yoklanabilir. (Sistemin dönme ve öteleme simetrisi olduğu varsayılmıştır.) Karakteristik bir uzunluk ölçeği olan bir sistemde, bağıdaşıklıklar $z = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \gg \xi$ mesafeleri için sifıra giderler. Karşılık olarak, sistemin ölçek değişmezliği varsa, bağıdaşıklıklar uzun mesafelerde homojendirler, ve $\lim_{z \rightarrow \infty} C(z) \sim z^{2\chi}$ 'dir.

Görmüş olduğumuz gibi, denge istatistiksel mekaniğinde, olasılık $\mathcal{P}_{\text{denge}} \propto \exp(-\beta\mathcal{H}[m])$, $\beta = (k_B T)^{-1}$ olmak üzere, ile verilir. Açıkça, sonsuz sıcaklıkta, sonlu bir Hamiltoniyen için, bağıdaşıklıklar yoktur. $\mathcal{H}[m]$ 'deki etkileşimler *kısa erimli* oldukları sürece, yüksek sıcaklık açılımı ile gösterilebilir ki küçük fakat sonlu β 'da bağıdaşıklıklar $C(z) \propto \exp(-z/\xi)$ şeklinde azalır, ki bu karakteristik bir uzunluk ölçeğine işaret eder¹. Bağıdaşıklık uzunluğu, genelde, sıcaklığı azalttıkça artar, ve sistem sürekli (kritik) bir faz geçişinden geçerse, ıraksayabilir. Kritik bir geçişte, sistem ölçek değişmezdir, ve $C(z) \propto z^{2-d-\eta}$ olur. Ancak, bu tür ölçek bağımsızlığı, sadece sistem parametrelerinin kritik sıcaklığa çok hassas bir şekilde ayarlanması ile elde edilebildiği anlamında, *genel değildir*. Doğadaki ölçek bağımsız çoğu süreç, bu tarz ince ayar gerektirmez, ve bundan dolayı, kritik noktaya benzetme çok öğretici değildir [2] [3].

Ölçeklenme bağımsızlığı tartışmalarımızı, $h(\mathbf{x}, t)$ yüksekliği ile tanımlanan bir yüzeyin dinamiklerini inceleyerek tertip edeceğiz. Belirli örnekler, sabun filminin bozulmaları ya da bir kaptaki suyun yüzeyinin salınımlarıdır. Her iki durumda da, en az enerji konfigürasyonu düz bir yüzeydir (kütle çekiminin sabun filmindeki küçük etkisini ihmal edersek). Sabun filminin salınımlarının enerji maliyeti, artan alandan ve *yüzey gerilimi* σ 'dan gelir. Alanı, eğimin kuvvetleri cinsinden açarsak,

$$\mathcal{H}_\sigma = \sigma \int d^d \mathbf{x} \left[\sqrt{1 + (\nabla h)^2} - 1 \right] \approx \frac{\sigma}{2} \int d^d \mathbf{x} (\nabla h)^2. \quad (\text{VIII.49})$$

Suyun yüzeyi için, ek olarak bir kütle çekimsel potansiyel enerji vardır, bütün su sütunlarının katkısını toplayarak

$$\mathcal{H}_g = \int d^d \mathbf{x} \int_0^{h(\mathbf{x})} \rho g h(\mathbf{x}) = \frac{\rho g}{2} \int d^d \mathbf{x} h(\mathbf{x})^2 \quad (\text{VIII.50})$$

¹Tabi ki, *uzun erimli* etkileşimlerle, uzun-erimli bağıdaşıklıklar yaratılabilir. Ancak, yerel, *kısa erimli* etkileşimlerle uzun erimli bağıdaşıklıkların nasıl yaratıldığını bulmak daha ilginçtir.

olarak elde edilir. Küçük salınımların toplam (potansiyel) enerjisi

$$\mathcal{H} = \int d^d \mathbf{x} \left[\frac{\sigma}{2} (\nabla h)^2 + \frac{\rho g}{2} h^2 \right] \quad (\text{VIII.51})$$

olarak verilir, ki burada ikinci terim sabun filmi için yoktur.

Karşılık gelen Langevin denklemi

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\mu \rho g h + \mu \sigma \nabla^2 h + \eta(\mathbf{x}, t) \quad (\text{VIII.52})$$

doğrusaldır ve Fourier dönüşümü ile çözülebilir. Düz bir arayüzeyden başlayarak, $h(\mathbf{x}, t = 0) = h(\mathbf{q}, t = 0) = 0$, t anındaki biçimi

$$h(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \int_0^t d\tau e^{-\mu(\rho g + \sigma q^2)(t-\tau)} \eta(\mathbf{q}, \tau) \quad (\text{VIII.53})$$

olur. Yüzeyin ortalama yüksekliği, $\bar{H} = \int d^d \mathbf{x} \langle h(\mathbf{x}, t) \rangle / L^d$ sıfırken, genel genişliği

$$w^2(t, L) \equiv \frac{1}{L^d} \int d^d \mathbf{x} \langle h(\mathbf{x}, t)^2 \rangle = \frac{1}{L^d} \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \langle |h(\mathbf{q}, t)|^2 \rangle \quad (\text{VIII.54})$$

olarak tanımlanır, burada L yüzeyin doğrusal boyutudur. Denklem VIII.33'e benzer şekilde, genişliğin

$$w^2(t, L) = \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{D}{\gamma(\mathbf{q})} \left(1 - e^{-2\gamma(\mathbf{q})t} \right) \quad (\text{VIII.55})$$

şeklinde büyüdüğünü görürüz. Problemden, denklem VIII.31'deki gibi, karakteristik uzunluk ölçekleri ile ilgili bir dizi zaman ölçeği vardır. En kısa zaman ölçeğini, $t_{\text{en küçük}} \propto a^2 / (\mu\sigma)$ atomik boyut a belirler. En uzun zaman ölçeğini, ya kılcılık ($\lambda_k \equiv \sqrt{\sigma / \rho g}$) ya da sistem boyutu (L) belirler. Basitleştirmek için, sabun filmine odaklanacağız, burada kütle çekiminin etkileri ihmal edilebilir ve $t_{\text{en büyük}} \propto L^2 / (\mu\sigma)$. Şimdi, denklem VIII.55'teki üç farklı davranış alanlarını belirleyebiliriz:

- (a) $t \ll t_{\text{en küçük}}$ için, bütün \mathbf{q} 'lar için $\gamma(\mathbf{q})t \ll 1$ olduğunda, hiçbir mod rahatlamamıştır. Her mod, yayılarak büyür, ve

$$w^2(t, L) = \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{D}{\gamma(\mathbf{q})} 2\gamma(\mathbf{q})t = \frac{2Dt}{a^d} \quad (\text{VIII.56})$$

- (b) $t \gg t_{\text{en büyük}}$ için, bütün \mathbf{q} 'lar için $\gamma(\mathbf{q})t \gg 1$ olduğu için, bütün modlar denge değerlerine gevşemişlerdir. Yükseklik salınımları,

$$w^2(t, L) = \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{D}{\mu\sigma q^2} \quad (\text{VIII.57})$$

ile verilen en büyük değerlerinde doyuma ulaşmışlardır. Doymuş değer, yüzeyin boyutuna

bağlıdır, ve genel bir d boyutunda

$$w^2(t, L) \propto \frac{D}{\mu\sigma} \begin{cases} a^{2-d} & d > 2 \text{ için } (\chi = 0) \\ \ln(L/a) & d = 2 \text{ için } (\chi = 0^+) \\ L^{2-d} & d < 2 \text{ için } (\chi = \frac{2-d}{2}) \end{cases} \quad (\text{VIII.58})$$

olarak davranır, burada genişliğin sistem boyutuyla ıraksamasını $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t, L) \propto L^\chi$ ile belirleyen *sertlik üsteli* χ 'yi tanımladık. (0^+ sembolü, logaritmik bir ıraksamayı göstermek için kullanılmıştır.) $d = 1$ 'de $\chi = 1/2$ üsteli, tek boyutlu arayüzün rastgele yürüme gibi salındığını gösterir

- (c) $t_{\text{en küçük}} \ll t \ll t_{\text{en büyük}}$ için, sadece daha kısa uzunluk ölçekli modların bir kısmı doyurulmuştur. Denklem VIII.55'teki integrali alınan ifade ($g = 0$ için), $y = \mu\sigma q^2 t$ olarak tanımlanarak boyutsuz hale getirilebilir ve

$$\begin{aligned} w^2(t, L) &\propto \frac{D}{\mu\sigma} \int dq q^{d-3} (1 - e^{-2\mu\sigma q^2 t}) \\ &\propto \frac{D}{\mu\sigma} \left(\frac{1}{\mu\sigma t} \right)^{\frac{d-2}{2}} \int_{t/t_{\text{en büyük}}}^{t/t_{\text{en küçük}}} dy y^{\frac{d-4}{2}} (1 - e^{-2y}) . \end{aligned} \quad (\text{VIII.59})$$

Son integral, $d < 2$ için yakınsar, ve $d \geq 2$ için, üst sınırı tarafından belirlenir. Genişliğin başlangıç büyümesi bir başka üstel β tarafından belirlenir, ki $\lim_{t \rightarrow 0} w(t, L) \propto t^\beta$ olarak tanımlanır, ve

$$w^2(t, L) \propto \begin{cases} \frac{D}{\mu\sigma} a^{2-d} & d > 2 \text{ için, } (\beta = 0) \\ \frac{D}{\mu\sigma} \ln(t/t_{\text{en küçük}}) & d = 2 \text{ için, } (\beta = 0^+) \\ \frac{D}{(\mu\sigma)^{d/2}} t^{(2-d)/2} & d < 2 \text{ için, } (\beta = (2-d)/4) \end{cases} . \quad (\text{VIII.60})$$

χ ve β üstelleri, ayrıca yükseklik-yükseklik bağıdaşıklık fonksiyonlarını da belirlerler, ki *dinamik ölçekleme* şeklini alır:

$$\langle [h(\mathbf{x}, t) - h(\mathbf{x}', t')]^2 \rangle = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{2\chi} g \left(\frac{|t - t'|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^z} \right) . \quad (\text{VIII.61})$$

Eşit zamanlı denge durumu bağıdaşıklıkları sadece $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 'ne bağlı oldukları için, $\lim_{y \rightarrow 0} g(y)$ bir sabit olmalıdır. Diğer taraftan, aynı noktadaki bağıdaşıklıklar sadece zamana bağlı olabilir, ki bu da $\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) \propto y^{2\chi/z}$ olmasını gerektirir, ve buradan $\beta = \chi/z$ üstel özdeşliği elde edilir.

Bu ölçekleme değişmezliği, kütle çekim potansiyel enerjisi Hamiltoniyen'e eklenince kırılır. Bu durumda, kılcallık uzunluğundan daha büyük mesafelerde, bağıdaşıklıklar $C(z) \propto \exp(-z/\lambda_c)$ olarak azalır. Bu iki durumun temelindeki fark nedir? Kütle çekiminin varlığı öteleme simetrisini, $\mathcal{H}[h(\mathbf{x} + c)] = \mathcal{H}[h(\mathbf{x})]$, bozar. Hamiltoniyen'de $\int d^d \mathbf{x} h(\mathbf{x})^2$ teriminin varlığına engel olarak karşılık gelen uzunluk ölçeğini kaldıran bu sürekli simetridir. (Alan kuramı dilinde, ikinci dereceden terimin katsayısı genel olarak *kütle* olarak adlandırılır.) *Sürekli bir simetrinin varlığı, genel ölçekleme bağımsızlığı* (GÖB) elde etmek için genel bir koşuldur [4]. Daha önceki bölümlerde tartışıldığı gibi, maddenin pek çok düşük sıcaklık fazı

vardır ki bunlarda sürekli bir simetri kendiliğinden kırılmıştır. Böyle bir durumun etrafındaki küçük salınımların *genel* simetriye uyması lazım. Elde edilen uyarımlar, “kütlesiz” *Goldstone modlarıdır*. Ferromanyetlerde *magnon*larla (kırılmış dönme simetrisi ile), ve *fonon*larla (kırılmış öteleme simetrisi) bağlantılı olarak, böyle modları tartıştık. Bütün bu durumlar, ölçek bağımsız salınımlar gösterirler.

Dinamiklerin dünyasında, daha genel, zamansal bağıdaşıklıkların, mesela $C(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, t - t') = \langle h(\mathbf{x}, t)h(\mathbf{x}', t') \rangle_c$, karakteristik bir zaman ölçeği, τ , gösterip göstermediği, veya $t - t'$ 'da homojen olup olmadığı sorusunu sorabiliriz. Uzamsal ve zamansal alanlardaki ölçek bağımsızlığının birbirlerine yakın bir şekilde bağlantılı olmasını beklemek doğaldır. Uzun mesafelerde bağıdaşıklıklar oluşturmak, sistem *yerel* dinamik kurallara uyuyorsa, genel olarak uzun zamanlar gerektirir (tipik olarak $(t - t') \propto |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^z$). Uzamsal ölçek bağımsızlığı, bu sebepten, zaman ölçeğinin olmadığı anlamına gelir. Tersisi doğru değildir, çünkü, dinamikler, *korunum yasaları* ile zaman ölçeğini kaldırmanın bir başka olasılığını sunarlar. Bu durumla, zaten, kütle çekiminin varlığında, yüzey Hamiltoniyen'inin model B dinamiğini incelerken karşılaştık. Denklem VIII.47, uzun dalgaboylu modların kütleli olduğu halde, dalga vektörü \mathbf{q} olan bir modun, $\mathbf{q} \rightarrow 0$ limitinde, rahatlama zamanının $1/q^2$ olarak ıraksadığını gösterir.

Dengedeki sistemlerde, simetriler ve korunma yasaları birbirleriyle yakinen ilgilidir. $\mathcal{H}[h(\mathbf{x} + c)] = \mathcal{H}[h(\mathbf{x})]$ simetrisi altında değişmeyen *yerel* bir Hamiltoniyen düşünelim. \mathcal{H} sadece ∇h ve daha yüksek türevlere bağlı olabileceği için,

$$v = \mu F = -\mu \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta h(\mathbf{x})} = \mu \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nabla h} + \dots \equiv \nabla \cdot \vec{j}. \quad (\text{VIII.62})$$

Model A dinamiği için bile, hızın deterministik kısmı bir akımın diverjansıdır ve $\int d^d \mathbf{x} h(\mathbf{x}, t)$ 'yi korur. Bu korunum sadece istatistiksele, ve yerel olarak, model A'daki gürültü tarafından korunmayabilir. Yukarıdaki sonuç *Noether'in kuramının* bir sonucudur.

VIII.E Açık Sistemlerin Denge Dışı Dinamikleri

Yaklaşık denge dinamiklerini, doğada genel ölçek bağımsızlığı gösteren çeşitli süreçlere uygularken dikkatli olmalıyız. Pek çok böyle sistem, mesela akan nehir veya sürüklenen bulut, dengeden çok uzaktır. Daha da ötesi, çevreleriyle sürekli parçacık ve bileşen değiştiren açık ve yaygın sistemlerdir. Böyle süreçlerin dinamiğini belirleyen herhangi bir Hamiltoniyen'in varlığı açık değildir, ve daha önce sunulan geleneksel yaklaşımın uygun olması gerekmez. Ancak, bu sistemlerde gözlemlenen sağlam öz-benzer bağıdaşıklıklar [1] durağan ölçek bağımsız olasılık dağılımları ile tasvir edilebileceklerini düşündürür. Bu kısım, açık ve yaygın sistemlerin dinamiğine genel bir yaklaşımı özetler, ki öz olarak, Bölüm 2'de anlatılan, etkin kabalaştırılmış alan kuramlarının oluşturulmasına benzer. Yine, $h(\mathbf{x}, t)$ statik alanının dinamiklerine bakalım:

1. Denge istatistiksel mekaniğinin başlangıç noktası Hamiltoniyendir $\mathcal{H}[h]$. Landau'nun reçetesi \mathcal{H} 'nin içinde problemin *simetrileri ile tutarlı* bütün terimleri dahil etmektir. Altında yatan felsefe, genel bir durumda, izin verilen bir terim vardır, ve sadece kaza eseri yok olabilir. Dengede olmayan dinamikte, *hareket denkleminin* incelenmesi gereken temel

nesne olduğunu varsayacağız. Yeterince uzun zaman ölçeklerinde, eylemsizlik terimleri ($\propto \partial_t^2 h$) kayıplı dinamiğin varlığında önemsizdir, ve h 'nin evrimi

$$\partial_t h(\mathbf{x}, t) = \overbrace{v[h(\mathbf{x}, r)]}^{\text{deterministik}} + \overbrace{\eta(\mathbf{x}, t)}^{\text{rastgele}} \quad (\text{VIII.63})$$

tarafından belirlenir.

2. Etkileşimler kısa erimli ise, (\mathbf{x}, t) 'deki hız sadece $h(\mathbf{x}, t)$ 'ye, ve (\mathbf{x}, t) 'de hesaplanan bir kaç türeve bağlıdır, yani

$$v(\mathbf{x}, t) = v(h(\mathbf{x}, t), \nabla h(\mathbf{x}, t), \dots) \quad (\text{VIII.64})$$

3. Sonra, deterministik hız, ve gürültünün bağdaşıklıklarını belirlemeliyiz. Landau'nun reçetesini genelleştirerek, temelde *simetri ve korunum yasalarıyla* uyumlu bütün terimler, v 'de genel olarak görünür. Gürültü, $\eta(\mathbf{x}, t)$, sadece iç düzenlemelerin olması veya harici girdi ve çıktılarının olup olmamasına göre korunumlu veya korunumsuz olabilir.

Doğal sonuç: Bu kural bütünüyle, hızın bir potansiyelden elde edilebilir olması ($v \neq -\hat{\mu} \delta \mathcal{H} / \delta h$), ve salınım-kayıp koşulunun olması ($\hat{D} \neq \hat{\mu} k_B T$) için bir gerekçe yoktur. Deterministik hız korunumlu olurken, gürültü olmayabilir. Dolayısıyla, denge yakını dinamiklerin çeşitli bildik sonucu artık geçerli olmayabilir.

Bir örnek olarak, bir nehir boyunca akan suyu (veya çevre yolu boyunca trafiği) düşünün. Dinamiğin deterministik kısmı korunumludur (suyun miktarı, ya da araba sayısı değişmez). Dolayısıyla, hız, bir akımın diverjansıdır, $v = -\nabla \vec{j}[h]$. Akım, \vec{j} , bir vektördür, ve problemdeki diğer iki vektörel nicelikten oluşturulmalıdır: gradyan operatörü ∇ ve ortalama taşıma yönü \hat{t} . (\hat{t} birim vektörü, akımın yada trafik akışının yönünü gösterir.). Akımın açılımındaki en düşük mertebeden terimler,

$$-\vec{j} = \hat{t}(\alpha h - \frac{\lambda}{2} h^2 + \dots) + \nu_1 \nabla h + \nu_2 \hat{t}(\hat{t} \cdot \nabla) h + \dots \quad (\text{VIII.65})$$

verir. Akımın, net akışa paralel ve dik bileşenleri

$$\begin{cases} -j_{\parallel} = \alpha h - \frac{\lambda}{2} h^2 + (\nu_1 + \nu_2) \partial_{\parallel} h + \dots \\ -j_{\perp} = \nu_1 \vec{\partial}_{\perp} h + \dots \end{cases} \quad (\text{VIII.66})$$

olur. Elde edilen hareket denklemi:

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \partial_{\parallel}(\alpha h - \frac{\lambda}{2} h^2) + (\nu_1 + \nu_2) \partial_{\parallel}^2 h + \nu_1 \partial_{\perp}^2 h + \dots + \eta(\mathbf{x}, t) \quad (\text{VIII.67})$$

Harici girdi ve çıktılar yoksa (yağmur, süzme, veya çıkış yok), gürültü de korunumludur, ve bağdaşıklıkları

$$\langle \eta(\mathbf{q}, t) \rangle = 0, \quad \text{ve} \quad \langle \eta(\mathbf{q}, t) \eta(\mathbf{q}', t') \rangle = 2(D_{\parallel} q_{\parallel}^2 + D_{\perp} q_{\perp}^2) \delta(t - t') (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \quad (\text{VIII.68})$$

olur. Problemin simetrilerinin, gürültünün net akışa dik ve paralel bağdaşıklıklarının farklı olmasına izin verdiğine dikkat edin.

VIII.67 ve VIII.68 denklemleri bir *zorlanan yayılma sistemi* (ZYS) tanımlar [5], [6]. Denklem VIII.67'deki ilk terim, hareketli bir referans sistemindeki salınımlara bakarak yok edilebilir

$$h(x_{\parallel}, \mathbf{x}_{\perp}, t) \rightarrow h(x_{\parallel} - \alpha t, \mathbf{x}_{\perp}, t) \quad (\text{VIII.69})$$

ve bundan sonra ihmal edilecektir. Doğrusal olmayan terimleri ihmal edersek, bu salınımlar, eşyönelimli olmayan gürültülü yayılma denklemini sağlarlar

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nu_{\parallel} \partial_{\parallel}^2 h + \nu_{\perp} \partial_{\perp}^2 h + \eta(\mathbf{x}, t) \quad (\text{VIII.70})$$

burada $\nu_{\parallel} = \nu_1 + \nu_2$ ve $\nu_{\perp} = \nu_1$. Şimdi, Fourier modları

$$\tau(\mathbf{q}) = \frac{1}{\nu_{\parallel} q_{\parallel}^2 + \nu_{\perp} q_{\perp}^2} \quad (\text{VIII.71})$$

karakteristik zamanları ile gevşerler. Denklem VIII.48'e giden adımları takip edersek

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle |h(\mathbf{q}, t)|^2 \rangle = \frac{D_{\parallel} q_{\parallel}^2 + D_{\perp} q_{\perp}^2}{\nu_{\parallel} q_{\parallel}^2 + \nu_{\perp} q_{\perp}^2} \quad (\text{VIII.72})$$

elde ederiz. Durgun bağdaşıklık fonksiyonları ², gerçek uzayda

$$\begin{aligned} \langle (h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{0}))^2 \rangle &= \int \frac{d^{d-1} \mathbf{q}_{\perp} dq_{\parallel}}{(2\pi)^d} \left(2 - 2 \cos(q_{\parallel} x_{\parallel} + \mathbf{q}_{\perp} \cdot \mathbf{x}_{\perp}) \right) \frac{D_{\parallel} q_{\parallel}^2 + D_{\perp} q_{\perp}^2}{\nu_{\parallel} q_{\parallel}^2 + \nu_{\perp} q_{\perp}^2} \\ &\propto \left(\frac{D_{\perp}}{\nu_{\perp}} - \frac{D_{\parallel}}{\nu_{\parallel}} \right) \sqrt{\frac{\nu_{\parallel}^{d-1} \nu_{\perp}}{(\nu_{\perp} x_{\parallel}^2 + \nu_{\parallel} x_{\perp}^2)^d}} \end{aligned} \quad (\text{VIII.73})$$

olarak davranırlar.

Bu bağdaşıklıkların uzamsal olarak yaygın ve ölçek bağımsız olduğuna dikkat edin. Bu, yeniden, korunum yasalarının bir sonucudur. $D_{\perp}/\nu_{\perp} = D_{\parallel}/\nu_{\parallel}$ özel durumunda Einstein bağıntısı ($D(\mathbf{q}) \propto \nu(\mathbf{q})$) sağlanır, ve salınımların bağdaşıklıkları yoktur ($C(\mathbf{x}) \propto d^d(\mathbf{x})D/\nu$). O zaman sonuçlar, $\mathcal{H} \propto \int d^d \mathbf{x} h^2$ Hamiltoniyen'i ile model B dinamiklerine karşılık gelir. Bu sonuç bize, denge yakınındaki dinamiklerin özel bir doğasını gösterir. Salınım-kayıp koşulu, denge durumuna yaklaşmayı sağlamak için gereklidir, ki burada genel olarak ölçek bağımsızlığı yoktur. Diğer taraftan, bu koşulu kaldırmak, korunumlu bir sistemde GÖB'na yol açar. ($D_{\perp}/\nu_{\perp} \neq D_{\parallel}/\nu_{\parallel}$ olması akışa paralel ve dik iki farklı sıcaklığa sahip olmak gibidir.)

²Denge dışı durumlarda, *durgun* kelimesini uzun zamanlardaki davranışları nitellemek için kullanacağız

Şimdi, korunum yasalarını rastgele bir şekilde, probleme rastgele girdi ve çıktılar ekleyerek kiralım (yağmur, gider, veya çıkış şeklinde). Gürültünün özellikleri

$$\langle \eta(\mathbf{x}, t) \rangle = 0, \quad \text{ve} \quad \langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}', t') \rangle = 2D \delta(x_{\parallel} - x'_{\parallel}) \delta^{d-1}(\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}'_{\perp}) \delta(t - t') \quad (\text{VIII.74})$$

halini alır. Durgun durumda, momentum uzayında

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle |h(\mathbf{q}, t)|^2 \rangle = \frac{D}{\nu_{\parallel} q_{\parallel}^2 + \nu_{\perp} q_{\perp}^2} \quad (\text{VIII.75})$$

ve gerçek uzayda

$$\langle (h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{0}))^2 \rangle \propto D \left(\nu_{\perp} x_{\perp}^2 + \nu_{\parallel} x_{\parallel}^2 \right)^{\frac{2-d}{2}} \quad (\text{VIII.76})$$

Eşyönsüzlük dışında, bu sonuç, $\chi = (2 - d)/2$ olmak üzere, denklem VIII.61 ile aynıdır.

Sonuçlar, denklem VIII.67'deki $(-\lambda \partial_{\parallel} h^2/2)$ doğrusal olmayan terimi tarafından nasıl değişir? Önce, uzunlukları ve zamanı yeniden ölçekleyerek, basit bir *boyutsal analiz* yapalım. Eşyönsüz ölçeklemelere izin verirsek, $x_{\parallel} \rightarrow b x_{\parallel}$ ile beraber $t \rightarrow b^z t$, $\vec{x}_{\perp} \rightarrow b^{\zeta} \vec{x}_{\perp}$ ve $h \rightarrow b^{\chi} h$ alırsak, denklem VIII.67

$$b^{\chi-z} \frac{\partial h}{\partial t} = \nu_{\parallel} b^{\chi-2} \partial_{\parallel}^2 h + \nu_{\perp} b^{\chi-2\zeta} \partial_{\perp}^2 h - \frac{\lambda}{2} b^{2\chi-1} \partial_{\parallel} h^2 + b^{-z/2-(d-1)\zeta/2-1/2} \eta \quad (\text{VIII.77})$$

olur, burada denklem VIII.74 η 'nin ölçeklenmesini bulmak için kullanılmıştır. Böylece, çıplak ölçeklenme parametreleri

$$\begin{cases} \nu_{\parallel} \rightarrow b^{z-2} \nu_{\parallel} \\ \nu_{\perp} \rightarrow b^{z-2\zeta} \nu_{\perp} \\ \lambda \rightarrow b^{\chi+z-1} \lambda \\ D \rightarrow b^{z-2\chi-\zeta(d-1)-1} D \end{cases} \quad (\text{VIII.78})$$

olur. λ 'nın olmadığı durumda, daha önce karşılaştığımız gibi, $\zeta_0 = 1$, $z_0 = 2$ ve $\chi = (2 - d)/2$ seçerek parametreleri *ölçek değişmez* (yani b 'den bağımsız) yapabiliriz. Ancak, bu seçimle, küçük bir λ , yeniden ölçeklemeden sonra

$$\lambda \rightarrow b^{y_0} \lambda, \quad y_0 = \frac{4-d}{2} \quad \text{olmak üzere} \quad (\text{VIII.79})$$

şeklinde büyür. Doğrusal olmayan kısım, ölçeklenme altında büyüdüğünden dolayı, $d < 4$ boyutlarında ihmal edilemez.

VIII.79 denklemleri, doğrusal limite karşılık gelen *sabit nokta* (ölçek bağımsız denklem) yakınında geçerli renormalizasyon gurubu (RG) oluştururlar. RG denklemlerini sonlu doğrusal olmayan değerlerinde hesaplamak, tedirgeme hesapları gerektirir. Bazen, hesaplamaları kolaylaştıran ve üstel özdeşlikler veren tam *renormalize olmama koşulları* vardır. Neyseki denklem VIII.78 için, üç üsteli *tam olarak* belirlemeğe yetecek sayıda böyle özdeşlik vardır.

1. Doğrusalsızlık, Fourier uzayında q_{\parallel} ile orantılı olduğu için, RG altında, ν_{\perp} 'ü değiştirecek

bir katkı yaratmaz. Dolayısıyla, karşılık gelen, VIII.78 denklemlerindeki ν_{\perp} 'in 'çıplak' ölçeklenmesi her zaman için geçerlidir; sabit noktası $z - 2\zeta = 0$ üstel özdeşliği verir.

2. Doğrusalsızlık, korunumlu kısımda olduğu için, korunumlu olmayan gürültünün kuvvetini renormalize etmez. D 'nin renormalize olmaması, $z - 2\chi - \zeta(d-1) - 1 = 0$ üstel özdeşliğini verir. (Bu koşulun, denge model B dinamiğinde, doğal bir eşi vardır, $z - 2\chi - d - 2 = 0$, ki bu da iyi bilinen $z = 4 - \eta$ bağıntısını verir.)
3. Denklem VIII.67 çok küçük $x_{\parallel} \rightarrow x_{\parallel} - \delta\lambda t$, $t \rightarrow t$ yeniden parametrelemesi altında, eğer $h \rightarrow h + \delta$ olursa, değişmezdir. λ parametresinin hem denklem VIII.67'de doğrusalsızlığın katsayısı, hem de x_{\parallel} ve h yeniden parametrelemede değişmez çarpanı olarak görüldüğüne dikkat edin. Dolayısıyla, zorlanmış yayılım denkleminin bu simetriyi koruyan herhangi bir renormalizasyonu, λ katsayısını da değiştirmemelidir, ki bu $z + \chi - 1 = 0$ üstel özdeşliğini verir.

Kalan ν_{\parallel} parametresi, RG altında gerçekten banal olmayan bir evrimi takip eder. Ancak, yukarıdaki üç üstel özdeşlik, bütün $d \leq 4$ boyutlarında tam üstelleri vermek için idealdir [2]

$$\chi = \frac{1-d}{7-d}, \quad z = \frac{6}{7-d}, \quad \zeta = \frac{3}{7-d} \quad (\text{VIII.80})$$

VIII.F Büyüyen Yüzeyin Dinamiği

Çökme, veya moleküler ışın epitaksi ile kristallerin hızlı büyümesi, önemli bir teknolojik süreçtir. Ayrıca, denge dışı evrimleşme sürecinin de en basit örneğidir. Bu tür büyümede doğal olarak olan salınımların dinamik ölçeklenmesini anlamak istiyoruz. Yerel, deterministik hızın, v , yüzey yüksekliğine, $h(\mathbf{x}, t)$ bağımlılığını kurmak için, şunlara dikkat edin:

- (1) Yüzeydeki parçacıkların yeniden düzenlenmesi delik ve boşluklar yaratabildiği sürece, korunma yasaları yoktur.
- (2) Bir *öteleme simetrisi* vardır, $v[h(\mathbf{x}) + c] = v[h(\mathbf{x})]$, ki bu v 'nin sadece $h(\mathbf{x})$ 'in gradyanlarına bağlı olduğu anlamına gelir.
- (3) Basitleştirmek için, *eşyönlü* yüzeylere odaklanacağız, ki bunlarda bütün \mathbf{x} yönleri özdeştir [8]
- (4) Yukarı aşağı simetrisi yoktur, yani $v[h(\mathbf{x})] \neq -v[-h(\mathbf{x})]$. Böyle bir simetrinin olmaması, her pariteye sahip ek terimlere olanak tanır

Bu koşullarla, hareket denklemindeki en düşük mertebeden terimler

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = u + \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \dots + \eta(\mathbf{x}, t) \quad (\text{VIII.81})$$

verir [9], ki buradaki korunumsuz gürültü, denklem VIII.74'teki bağdaşıklıkları sağlar.

Denklem VIII.81'de, u , ortalama büyüme hızı ile ilişkilidir. Gerçekte, bütün çift terimlerin katsayıları u ile orantılı olmalıdır, çünkü, tercih edilen herhangi bir büyüme yönü olmadığı simetrik

durumda, hepsi yok olur. u sabiti, hareketli bir referans sitemine giderek, $h \rightarrow h - ut$ kolayca ortadan kaldırılabılır, dolayısıyla bundan sonra ihmal edileceklerdir. Banal olmayan ilk terim doğrusal olmayan $\lambda(\nabla h)^2/2$ katkısıdır. Geometrik olarak, bu terim, parçacık ekleyerek büyümenin, yüzey gradyanının normal yönde paralel taşınması ile gerçekleştiğine dikkat ederek açıklanabilir. (bkz Şekil 9.1'deki iç-şekil) Bu terim, herhangi bir Hamiltoniyenin değişimi olarak açıklanamaz, yani $v \neq -\mu\delta\mathcal{H}[h]/\delta h$. Dolayısıyla, denge durumunun (Noether'in kuramı) tersine, öteleme simetrisi bir korunma yasası anlamına gelmez, $v \neq -\nabla j$.

Denklem VIII.81'in büyüme olgusundaki önemi ile ilgili daha fazla delil, *deterministik büyüme*'den gelir. Küçük ve düzgün bir kar yağışı düşünün, $t = 0$ 'daki ilk şekli $h_0(\mathbf{x})$ ile tanımlansın. Doğrusal olmayan denklem, aslında "Cole-Hopf" dönüşümünün yardımıyla doğrusallaştırılabilir

$$W(\mathbf{x}, t) = \exp \left[\frac{\lambda}{2\nu} h(\mathbf{x}, t) \right] \quad (\text{VIII.82})$$

$W(\mathbf{x}, t)$ fonksiyonu, *çarpılan gürültülü* yayılım denkleminde göre evrilir:

$$\frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 W + \frac{\lambda}{2\nu} W \eta(\mathbf{x}, t) \quad (\text{VIII.83})$$

Gürültünün eksikliğinde, $\eta(\mathbf{x}, t) = 0$, denklem VIII.83, $W(\mathbf{x}, t = 0) = \exp [\lambda h_0(\mathbf{x})/2\nu]$ başlangıç koşulu ile çözülebilir, ve büyüme şekli

$$h(\mathbf{x}, t) = \frac{2\nu}{\lambda} \ln \left\{ \int d^d \mathbf{x}' \exp \left[-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{2\nu t} + \frac{\lambda}{2\nu} h(\mathbf{x}', t) \right] \right\} \quad (\text{VIII.84})$$

olarak bulunur. $\nu \rightarrow 0$ limitini incelemek öğreticidir, ki bu limit gerçekten kar yağışına uygundur, çünkü birikmeden sonra pek fazla yeniden düzenlenme yoktur. Bu limitte, denklem VIII.84'teki integral semer noktası yöntemi ile hesaplanabilir. Her \mathbf{x} için, üstelin en yüksek değerini veren bir \mathbf{x}' noktası bulmalıyız, ki buradan

$$h(\mathbf{x}, t) = \max_{\mathbf{x}'} \left\{ h_0(\mathbf{x}') - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{2\lambda t} \right\} \quad (\text{VIII.85})$$

ile tanımlanan paraboloidler kümesi elde ederiz. Bu tür parabolik diziler, doğadaki pek çok kat kat büyüme sürecinde yaygındır, biyolojik oluşumlardan, jeolojik oluşumlara kadar. $\lambda = 1$ için olan şekiller, optikten tanıdık olan, Huygens'in geometrik yöntemiyle oluşturulanlara özdeştir. Büyüme şekli (dalga önü), ilk şeklin her noktasından çizilen λt yarıçaplı çemberlerin dış zarfından elde edilir. Denklem VIII.81'deki doğrusalsızlık, bu genişleyen dalga önleri sürecini cebirsel olarak yakalar.

Büyüme ilerledikçe, yüzey paraboloidlerin *kabalaşmasıyla* düzgünleşirler. Bu özelliklerin t anındaki tipik boyutu ne kadardır? Denklem VIII.85'deki üstelin en büyük değerini bulurken, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2/2\lambda t$ azalmasını dengelememiz gerekir, ki \mathbf{x}' 'den uzak bir nokta seçerek $h_0(\mathbf{x}')$ 'ündeki olası bir kazançla yapabiliriz. Son ölçekleme, ilk şekil engebeliliği ile kontrol edilir. İlk şeklin χ engebeliliğine sahip bir *öz-afin fraktal* olduğunu varsayalım, yani

$$|h_0(\mathbf{x}) - h_0(\mathbf{x}')| \sim |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^\chi \quad (\text{VIII.86})$$

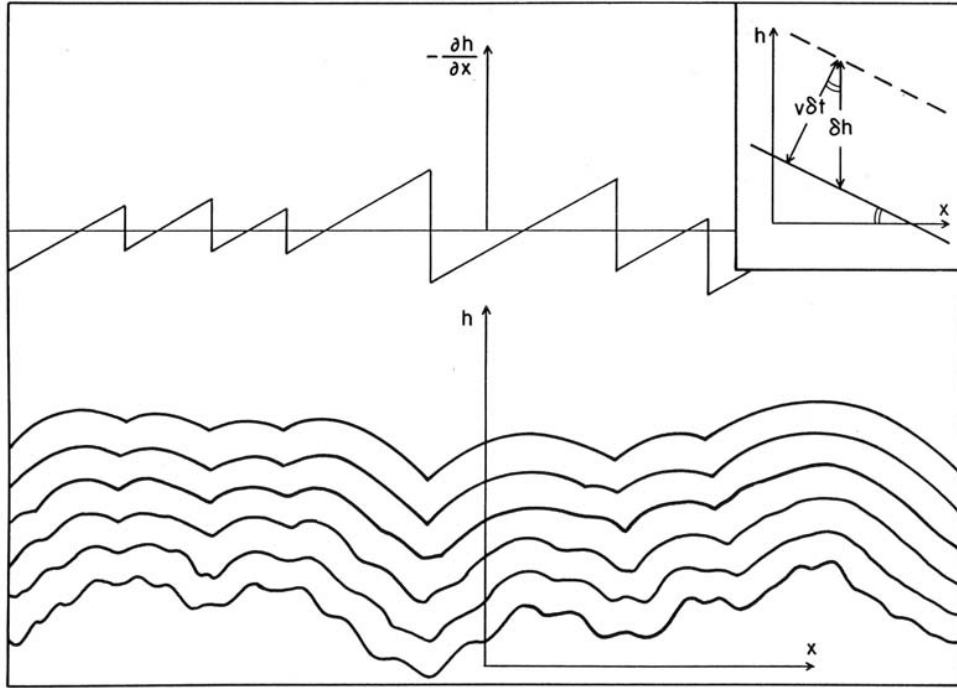


Figure VIII.1: Denklem VIII.81'e göre deterministik büyüme, kabalaşan paraboloid şekline yol açar. Tek boyutta, arayüzün eğimi 'şok önleri'ni oluşturur. İç resim, dik yöndeki yan büyümenin projeksiyonudur.

(Mandelbrot'a göre, dağlar için $\chi \approx 0.7$ [1].) Denklem VIII.85'teki iki terimi dengelemek

$$(\delta x)^\chi \sim \frac{(\delta x)^2}{t} \implies \delta x \sim t^{1/z}, \quad z + \chi = 2 \text{ olmak üzere} \quad (\text{VIII.87})$$

verir. Örnek olarak, eğer ilk şekil $d = 1$ 'de rastgele yürüyüş ise, $\chi = 1/2$ ve $z = 3/2$. Bu, bilginin şekil boyunca yayılımdan $\delta x \sim t^{2/3}$ daha hızlı bir şekilde dağılmasına yol açar.

Eğimin, $\vec{v}(x, t) = -\lambda \vec{\nabla} h(x, t)$,

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = \nu \nabla^2 \vec{v} - \lambda \nabla \eta \quad (\text{VIII.88})$$

denklemini sağladığına dikkat ediniz. Yukarıdaki, korunumlu bir kuvvet, $\vec{f} = -\lambda \nabla \eta$ tarafından rastgele karıştırılan, ağırlığı ν olan bir sıvının hızı için Navier-Stokes denklemdir[10]. Ancak, sıvı girdapsızdır çünkü

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = -\lambda \nabla \times \nabla h = 0 \quad (\text{VIII.89})$$

Bu, sıvılarda şok dalgalarının oluşması için basit bir örnek olan *Burgers denklemi*[11]. $d = 1$ 'de denklem VIII.85'in gradyanı, zamanla kabalaşan, testere dişi şeklindeki şokları verir. Ayrıca, $d = 1$ 'de, denklem VIII.67'nin, \vec{v} h 'nin rolünü oynayarak, VIII.88'in zorlanmış yayılma

denkleminde denk olduğuna da dikkat edin.

Doğrusal olmayan bir terimin varlığında, rastgele pürüzlenmeyi incelemek için, denklem VIII.77'deki gibi bir ölçeklenme analizi yapalım. $\mathbf{x} \rightarrow b\mathbf{x}$, $t \rightarrow b^z t$, ve $h \rightarrow b^x h$ ölçeklenmesi altında, denklem VIII.81

$$b^{x-z} \frac{\partial h}{\partial t} = \nu b^{x-2} \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} b^{2x-2} (\nabla h)^2 + \eta(b\mathbf{x}, b^z t) \quad (\text{VIII.90})$$

halini alır. Dönüştürülmüş gürültünün, $\eta'(\mathbf{x}, t) = b^{z-x} \eta(b\mathbf{x}, b^z t)$, bağıdaşlıkları

$$\begin{aligned} \langle \eta'(\mathbf{x}, t) \eta'(\mathbf{x}', t') \rangle &= b^{2z-2x} 2D \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') b^{-d} \delta(t - t') b^{-z} \\ &= b^{z-d-2x} 2D \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \end{aligned} \quad (\text{VIII.91})$$

denklemini sağlar. Bu ölçeklenmeyi takiben, denklem VIII.81'deki parametreler

$$\begin{cases} \nu \rightarrow b^{z-2} \nu \\ \lambda \rightarrow b^{x+z-2} \lambda \\ D \rightarrow b^{z-2x-d} D \end{cases} \quad (\text{VIII.92})$$

ifadelerine dönüşür. $\lambda = 0$ için, denklem, $z_0 = 2$ ve $\chi_0 = (2 - d)/2$ seçerek ölçek bağımsız hale getirilebilir. Bu doğrusal sabit nokta yakınında, λ , $b^{z_0+\chi_0-2} \lambda = b^{(2-d)/2} \lambda$ 'ya ölçeklenir, ve $d < 2$ 'de önemli bir operatördür. Gerçekten, tedirgemeli dinamik renormalizasyon gurubu, $d = 2$ 'de *sınırdaki önemli* olduğunu söyler, ve bütün boyutlarda, yeterince büyük bir λ , yeni ölçeklenme davranışlarına yol açar. (Sonraki kısımda bu daha fazla tartışılacak.)

Tam doğrusalsız rastgele denklemin üstelerinin bulunmasına yardımcı olacak herhangi bir renormalize olmama koşulu var mıdır? VIII.81 ile VIII.88 denklemleri basit bir dönüşümle birbirleriyle ilişkili olduklarından, aynı ölçeklenme özelliklerine sahip olmalıdırlar. Navier-Stokes denklemi, sıvı parçacıkları için Newton hareket yasalarından elde edilebildikleri için, düzgün hareket eden bir koordinat sistemine değiştirme Galilean dönüşmezliği vardır. Bu simetri daha büyük ölçeklere renormalize edilirken korunur ve denklem VIII.88'in sol tarafındaki iki terimin oranının $(\partial_t \vec{v}$ ve $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v})$ bir olarak kalmasını sağlar. Denklem VIII.81 cinsinden, bu λ parametresinin renormalize olmaması anlamına gelir, ve buradan

$$\chi + z = 2 \quad (\text{VIII.93})$$

elde edilir.

Neyazık ki, başka renormalize olmama koşulu, $d = 1$ 'deki hariç, yoktur. Denklem VIII.36'yı takiben, dizilim olasılığı için Fokker-Planck denklemini

$$\frac{\partial \mathcal{P}([h(\mathbf{x})], t)}{\partial t} = - \int d^d \mathbf{x} \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{x})} \left[\left(\nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 \right) \mathcal{P} - D \frac{\delta \mathcal{O}}{\delta h(\mathbf{x})} \right] \quad (\text{VIII.94})$$

olarak elde ederiz. Denklem VIII.81, bir Hamiltoniyen'den elde edilmediği için, genel olarak, uzun sürelerde durağan çözümü bilmiyoruz. $d = 1$ 'de, bir tahmin yapar, ve

$$\mathcal{P}_0 [h(x)] \propto \exp \left[-\frac{\nu}{2D} \int dx (\partial_x h)^2 \right] \quad (\text{VIII.95})$$

şeklinde bir çözüm deneriz.

$$\frac{\delta \mathcal{P}_0}{\delta h(x)} = -\partial_x \frac{\delta \mathcal{P}_0}{\delta (\partial_x h)} = \frac{\nu}{D} (\partial_x^2 h) \mathcal{P}_0 \quad (\text{VIII.96})$$

olduğundan, denklem VIII.94'ten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial t} &= - \int dx \frac{\delta \mathcal{P}_0}{\delta h(x)} \left(\nu \partial_x^2 h + \frac{\lambda}{2} (\partial_x h)^2 - D \frac{\nu}{D} \partial_x^2 h \right) \\ &= -\frac{\lambda}{2} \mathcal{P}_0 \int dx \frac{\nu}{D} (\partial_x^2 h) (\partial_x h)^2 = -\frac{\lambda \nu}{2D} \mathcal{P}_0 \int dx \partial_x \left(\frac{(\partial_x h)^3}{3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.97})$$

elde edilir. Dolayısıyla, tek boyutlu denklemin durağan çözümünü bulduk. (Bu işlem daha yüksek boyutlarda çalışmaz, çünkü son sonucu tam türev olarak yazmak mümkün değildir.) Şaşılacak şekilde, durağan dağılım, dengedekinin D/ν ile orantılı sıcaklıktakinin aynısıdır. Dolayısıyla, pürüzlülük üstelini $\chi = 1/2$ olarak hemen belirleriz, ki denklem VIII.93'teki üstel özdeşliğiyle beraber, $z = 3/2$ verir, yani süper-yayılm davranışı.

Kuvvetli doğrusallıksız durumundaki üstellerin değerleri, daha üst boyutlarda tam olarak bilinmemektedir. Ancak, büyümenin yoğun sayısal simülasyonları oldukça güvenilir tahminler vermiştir. Üç boyutta büyütülen bir yüzey için fiziksel olarak ilginç durumda ($d = 2$), $\chi \approx 0.3$ ve $z \approx 1.61$ [12]. Üstellerin genel d boyuttaki değerlerine oldukça iyi (ama tam olmayan) uydurma Kim ve Kosterlitz tarafından yapılan aşağıdaki tahmindir[13]

$$\chi \approx \frac{2}{d+3} \quad \text{ve} \quad z \approx \frac{2(d+2)}{d+3} \quad (\text{VIII.98})$$

Kaynakça

- [1] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Francisco, 1982)
- [2] T. Hwa ve M. Kardar, Phys. Rev. A **45**, 7002 (1992)
- [3] Benzer motivasyonlar, Öz-Düzenlenen Kritiklik kavramındaki gelişmelerin temelinde yatar, P. Bak, C. Tang ve K. Wisenfeld, Phys. Rev. Lett **59**, 381 (1987). Genel ölçek değişmezlikle farklılıkları ve benzerlikleri [2]'de tartışılmıştır.
- [4] G. Grinstein, S. Sachdev, ve D. H. Lee, Phys. Rev. Lett **64**, 1927 (1990)
- [5] H. K. Janssen ve J. L. Lebowitz, C. Maes, ve H. Spohn, Phys. Rev. A **42**, 1954 (1990)
- [6] P. L. Garrido, J. L. Lebowitz, C. Maes, ve H. Spohn, Phys. Rev. A **42**, 1954 (1990); Z. Chng, P.L. Garrido, J.L. Lebowitz, ve J.L. Valles, Europhys. Lett. **14**, 507 (1991)
- [7] *Dynamics of Fractal Surfaces*, editörler F. Family ve T. Vicsek, World Scientific Singapore (1991)
- [8] bkz., ancak, D. Wold, Pyys. Rev. Lett. **67**, 1783 (1991)
- [9] M. Kardar, G. Parisi, ve Y.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56**, 889 (1986); E. Medina, T. Hwa, M. Kardar, ve Y.-C. Zhang, Phys. Rev. A **39**, 3053 (1989)
- [10] D. Forster, D. R. Nelson, ve M. J. Stephen, Phys. Rev. A **16**, 732 (1977)
- [11] J. M. Burgers, *The Nonlinear Diffusion Equation* (Riedel, Boston, 1974)
- [12] B.M. Forrest, ve L.-H. Tang, Phys. Rev. Lett. **64**, 1405 (1990)
- [13] J.M. Kim, J.M. Kosterlitz, Phys. Rev. Lett. **62**, 2289 (1989)