8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

VIII.B Bir Alanın Denge Dinamikleri

Bir sonraki adım, Langevin formalizmini, bir yığın serbestlik derecesine, ki en uygun şekilde bir alanla tarif edilir, genelleştirmektir. Bir mıknatısın düzen parametresi alanını, $\vec{m}(\mathbf{x},t)$, düşünelim. Denge durumunda, kabalaştırılmıs bir mıknatıslanma alan dizilimini bulma olasılığı,

$$\mathcal{H}[\vec{m}] = \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{r}{2}m^2 + um^4 + \frac{K}{2}(\nabla m)^2 + \cdots\right] \tag{VIII.22}$$

Landau-Ginzburg Hamiltoniyen'inin Boltzman ağırlığı ile verilir. Açıkça, yukarıdaki enerji fonksiyoneli kinetik enerji içermez, ve bir önceki bölümde kullanılan $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ pontasiyel enerjisinin benzeri olarak düşünülmelidir. $\vec{m}(\mathbf{x})$ alanının dinamiğini belirleyecek bir Langevin denklemi oluşturmak için, her alan elemanına etki eden *kuvvet*in benzerini, bu potansiyelin değişimlerinden elde etmeliyiz. Denklem VIII.22'nin *fonksiyonel türevi*,

$$F_i(\mathbf{x}) = -\frac{\delta\mathcal{H}[\vec{m}]}{\delta m_i(\mathbf{x})} = -rm_i - 4um_i|\vec{m}|^2 + K\nabla^2 m_i \tag{VIII.23}$$

Denklem VIII.2'nin açık benzeri

$$\frac{\partial m_i(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \mu F_i(\mathbf{x}) + \eta_i(\mathbf{x},t) \tag{VIII.24}$$

olur, burada η rastgele hızdır, öyle ki

$$\langle\eta_i(\mathbf{x},t)\rangle = 0, \quad \text{ve} \quad \langle\eta_i(\mathbf{x},t)\eta_j(\mathbf{x}',t')\rangle = 2D\delta_{ij}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta(t-t') \tag{VIII.25}$$

Elde edilen Langevin denklemi

$$\frac{\partial\vec{m}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\mu r\vec{m} - 4\mu um^2\vec{m} + \mu K\nabla^2\vec{m} + \vec{\eta}(\mathbf{x},t) \tag{VIII.26}$$

zaman bağımlı Landau-Ginzburg denklemi olarak bilinir. $m^2\vec{m}$ doğrusal olmayan teriminden dolayı, bu denklemi tam olarak çözmek mümkün değildir. Davranışı hakkında fikir sahibi olmak için, modelin $u = 0$ olan *Gaussiyan ağırlık* tarafından iyi bir şekilde tasvir edilen düzensiz fazından başlarız. Elde edilen doğrusal denklem, Fourier bileşenlerini inceleyerek kolayca çözülür,

$$\vec{m}(\mathbf{q},t) = \int d^d\mathbf{x}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\vec{m}(\mathbf{x},t) \tag{VIII.27}$$

ki

$$\frac{\partial\vec{m}(\mathbf{q},t)}{\partial t} = -\mu(r+Kq^2)\vec{m}(\mathbf{q},t) + \vec{\eta}(\mathbf{q},t) \tag{VIII.28}$$

denklemine uyan bir şekilde evrilir. Fourier dönüşümü alınmış gürültünün

$$\vec{\eta}(\mathbf{q},t) = \int d^d\mathbf{x}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\vec{\eta}(\mathbf{x},t) \tag{VIII.29}$$

ortalaması sıfırdır, $\langle\eta_i(\mathbf{q},t)\rangle = 0$, ve bağdaşıklıkları

$$\begin{aligned}\langle\eta_i(\mathbf{q},t)\eta_j(\mathbf{q}',t')\rangle &= \int d^d\mathbf{x}d^d\mathbf{x}'e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{x}'}\overbrace{\langle\eta_i(\mathbf{x},t)\eta_j(\mathbf{x}',t')\rangle}^{2D\delta_{ij}\delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta(t-t')} \\ &= 2D\delta_{ij}\delta(t-t')\int d^d\mathbf{x}e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{q}+\mathbf{q}')} \\ &= 2D\delta_{ij}\delta(t-t')(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\end{aligned} \tag{VIII.30}$$

Denklem VIII.28'deki her Fourier modu, denklem VIII.6'daki gibi bir yaya bağlanmış bağımsız parçacık gibi davranır.

$$\gamma(\mathbf{q}) \equiv \frac{1}{\tau(\mathbf{q})} = \mu(r+Kq^2) \tag{VIII.31}$$

azalma hızını tanımlarsak, her modun evrilme hızı denklem VIII.8'dekine benzer, ve

$$\vec{m}(\mathbf{q},t) = \vec{m}(\mathbf{q},0)e^{-\gamma(\mathbf{q})t} + \int_0^t d\tau e^{-\gamma(\mathbf{q})(t-\tau)}\vec{\eta}(\mathbf{q},t) \tag{VIII.32}$$

ifadesini tekip eder. Her moddaki salınımlar, farklı bir *rahatlama zamanı* $\tau(\mathbf{q})$ ile azalır; $\langle\vec{m}(\mathbf{q},t)\rangle = \vec{m}(\mathbf{q},0)\exp\left[-t/\tau(\mathbf{q})\right]$. Denge durumunda, Gaussiyan modeldeki düzen parametresi, $\xi = \sqrt{K/r}$ uzunluk ölçeğinde bağdaşıktır. Dengeye rahatlamayı gözönüne alırken, ξ'den büyük uzunluk ölçeklerinde (veya $q \ll 1/\xi$), rahatlama zamanı $\tau_{\text{max}} = 1/(\mu r)$ değerinde doygunluğa ulaşır. Gaussiyan modelin $r = 0$'daki tekil noktasına yaklaşırken, dengeye ulaşma zamanı ıraksar. Bu olay, *kritik yavaşlama* olarak bilinir, ve değişmiş üstellerle de olsa, doğrusal olmayan denklemlerde de vardır. Dolayısıyla, kritik nokta, ıraksayan *uzunluk* ve *zaman* ölçekleriyle karakterize edilir. Bağdaşıklık uzunluğu ξ'dan daha kısa mesafelerdeki kritik salınımlar için karakteristik zaman ölçeği, dalgaboyuyla beraber $\tau(q) \approx (\mu Kq^2)^{-1}$ şeklinde büyür. Kritik uzunluk ve zaman ölçekleri arasındaki ölçeklenme bağıntısı $\tau \propto \lambda^z$ şeklinde bir *dinamik üstel* z ile tasvir edilir. Kritik Gaussiyan modeli için olan $z = 2$ değeri, dağılım sürecini hatırlatır.

Zaman bağımlı bağdaşıklık fonksiyonları,

$$\begin{aligned}\langle m_i(\mathbf{q},t)m_j(\mathbf{q}',t)\rangle_c &= \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 e^{-\gamma(\mathbf{q})(t-\tau_1)-\gamma(\mathbf{q}')(t-\tau_2)}\overbrace{\langle\eta_i(\mathbf{q},\tau_1)\eta_j(\mathbf{q}',\tau_2)\rangle}^{2D\delta_{ij}\delta(\tau_1-\tau_2)(2\pi)^d\delta^2(\mathbf{q}+\mathbf{q}')} \\ &= (2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}')2D\delta_{ij}\int_0^t d\tau e^{-2\gamma(\mathbf{q})(t-\tau)} \\ &= (2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\delta_{ij}\frac{D}{\gamma(\mathbf{q})}\left(1-e^{-2\gamma(\mathbf{q})t}\right) \\ &\xrightarrow{t\to\infty} (2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\delta_{ij}\frac{D}{\mu(r+Kq^2)}\end{aligned} \tag{VIII.33}$$

şeklinde elde edilir. Ancak, denklem VIII.22'deki Hamiltoniyen'in $u = 0$'da doğrudan köşegenleştirilmesi,

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{(r + Kq^2)}{2} |\vec{m}(\mathbf{q})|^2 \tag{VIII.34}$$

verir, ki bu

$$\langle m_i(\mathbf{q}) m_j(\mathbf{q}') \rangle = (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \delta_{ij} \frac{k_B T}{r + Kq^2} \tag{VIII.35}$$

bağdaşıklık fonksiyonlarını verir. VIII.33 ve VIII.35 denklemlerini kıyaslamak, uzun zaman dinamiklerinin, eğer salınım-kayıp koşulu, $D = k_B T \mu$, sağlanırsa, doğru denge davranışını türettiğini gösterir.

Gerçekten, genel olarak, tek parçacık Fokker-Planck denklemi VIII.21, toplam olasılık dağılımının evrimini tasvir edecek şekilde genelleştirilebilir:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\int d^d\mathbf{x} \frac{\delta}{\delta m_i(\mathbf{x})} \left[-\mu \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta m_i(\mathbf{x})} \mathcal{P} - D \frac{\delta \mathcal{P}}{\delta m_i(\mathbf{x})} \right] \tag{VIII.36}$$

Denge Boltmann ağırlığı için

$$\mathcal{P}_{\text{denge}} [\vec{m}(\mathbf{x})] \propto \exp \left[-\frac{\mathcal{H}[\vec{m}(\mathbf{x})]}{k_B T} \right] \tag{VIII.37}$$

fonksiyonel türevin sonucu

$$\frac{\delta \mathcal{P}_{\text{denge}}}{\delta m_i(\mathbf{x})} = -\frac{1}{k_B T} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta m_i(\mathbf{x})} \mathcal{P}_{\text{denge}} \tag{VIII.38}$$

Toplam olasılık akımı

$$J[h(\mathbf{x})] = \left[-\mu \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta m_i(\mathbf{x})} + \frac{D}{k_B T} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta m_i(\mathbf{x})} \right] \mathcal{P}_{\text{denge}} \tag{VIII.39}$$

eğer salınım-kayıp koşulu, $D = \mu k_B T$, sağlanıyorsa, yok olur. Tekrardan, Einstein denklemleri, denge ağırlığının gerçekten durgun durumu tasvir etmesini sağlar.

VIII.C Korunan Bir Alanın Dinamikleri

Aslında, $\mathbf{q}$ bağımlı hareketlilik ve gürültüyle, doğru denge ağırlıkları elde edilebilir, eğer, genelleştirilmiş salınım-kayıp koşulu sağlanırsa:

$$D(\mathbf{q}) = k_B T \mu(\mathbf{q}) \tag{VIII.40}$$

Genelleştirilmiş koşul, *korunan* bir alanın kayıplı dinamiği incelenirken faydalıdır. Langevin denklemlerine VIII.23-VIII.25 giden reçete, $\int d^d\mathbf{x}\vec{m}(\mathbf{x}, t)$ zamanla değiştiği için alanı korumaz. (Bu nicelik, $r > 0$ için ortalama olarak sıfır olsa da, rastgele salınımlar yaşar.) Eğer ikili bir karışımı inceliyorsak ($n = 1$), iki bileşenin yoğunlukları farkını ölçen düzen parametresi korunur. Sistemin bir parçasından alınan yoğunluk, gerçekçi bir dinamikte, sistemin komşu bölgelerinden birine gitmelidir. O zaman, öyle bir dinamik süreç düşünelim ki

$$\frac{d}{dt}\int d^d\mathbf{x}\vec{m}(\mathbf{x},t) = \int d^d\mathbf{x}\frac{\partial\vec{m}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \vec{0} \tag{VIII.41}$$

olsun. Denklem VIII.41'i sağlayan dinamik denklemi nasıl oluşturabiliriz? Eğer integrali alınan ifade bir tam diverjans ise, integral açıkça sıfırdır, yani

$$\frac{\partial m_i(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{j}_i + \eta(\mathbf{x},t) \tag{VIII.42}$$

Gürültünün kendisi de bir tam diverjans olmalıdır, $\eta_i = -\nabla\cdot\sigma_i$, ve dolayısıyla, Fourier uzayında,

$$\langle\eta_i(\mathbf{q},t)\rangle = 0 \quad ,\text{ve} \quad \langle\eta_i(\mathbf{q},t)\eta_j(\mathbf{q}',t')\rangle = 2D\delta_{ij}q^2\delta(t-t')(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}') \tag{VIII.43}$$

Şimdi, denklem VIII.40'daki genelleştirilmiş Einstein bağıntısından faydalanarak, doğru denge bağıntısını elde etmek için

$$\mathbf{j}_i = \mu\nabla\cdot\left(-\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta m_i(\mathbf{x})}\right) \tag{VIII.44}$$

alabiliriz. Böyle dinamik denklemler için standart adlandırma Hohenberg ve Halperin tarafından sağlanmıştır: **Model A** dinamiğinde, $\vec{m}$ alanı *korunmaz*, ve hareketlilik ve dağılım katsayıları sabittir. **Model B** dinemiğinde, $\vec{m}$ alanı *korunur*, ve $\hat{\mu} = -\mu\nabla^2$ ve $\hat{D} = -D\nabla^2$.

Şimdi model B dinamiğiyle Gaussiyan modele ($u = 0$) bakalım, bu sefer korunan bir düzen parametresiyle:

$$\frac{\partial\vec{m}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \mu r\nabla^2\vec{m} - \mu K\nabla^4\vec{m} + \vec{\eta}(\mathbf{x},t) \tag{VIII.45}$$

Her Fourier modunun evrimi,

$$\frac{\partial\vec{m}(\mathbf{q},t)}{\partial t} = -\mu q^2(r+Kq^2)\vec{m}(\mathbf{q},t) + \vec{\eta}(\mathbf{q},t) \equiv -\frac{\vec{m}(\mathbf{q},t)}{\tau(\mathbf{q})} + \vec{\eta}(\mathbf{q},t) \tag{VIII.46}$$

olarak verilir. Korunum yasasından gelen koşuldan dolayı, alanın rahatlaması daha zor ve yavaştır. Kritiklikten uzakta bile, rahatlama zamanları ıraksar. Dalga boyuna bağlı olarak, uzunluk ve zaman ölçekleri arasında

$$\tau(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mu q^2(r+Kq^2)} \approx \begin{cases} q^{-2} & q^2 \ll \xi^{-1} \text{ için} \quad (z=2) \\ q^{-4} & q^2 \gg \xi^{-1} \text{ için} \quad (z=4) \end{cases} \tag{VIII.47}$$

ifadesine bağlı, z dinamik üstelli bir ölçekleme buluruz.

Denge durumu değişmez, ve önceki gibi

$$\lim_{t\to\infty}\langle|\,\vec{m}(\mathbf{q},t)\,|^2\rangle = n\frac{Dq^2}{\mu q^2(r+Kq^2)} = \frac{nD}{\mu(r+Kq^2)} \tag{VIII.48}$$

Dolayısıyla, farklı dinamiklerle aynı durağan davranış elde edilebilir. Durağan üsteller (mesela

ν), denge (durgun) durum tarafından belirlenir, ve değişmezken, dinemik üsteller farklı olabilir. Sonuç olarak, dinamik kritik üsteller, statik olanlara kıyasla, çok daha fazla evrensellik sınıfı içerirler.