8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

I.C Faz Geçişleri

Parçacıklar arasındaki etkileşimlerin en gösterişli sonucu, kollektif davranışları bir kaç parçacığın davranışına çok az benzeyen yeni fazların ortaya çıkmasıdır. O zaman, parçacıklar bir makroskopik durumdan, tamamen farklı birine nasıl dönüşürler. Biçimsel bir bakış açısıyla, bütün makroskopik özellikler, serbest enerji ya da bölüşüm fonksiyonundan elde edilebilir. Faz geçişleri, tipik olarak, tepki fonksiyonlarında dramatik değişimler içerdiği için, serbest enerjideki tekilliklere karşılık gelmelidirler. Sonlu parçacık için bölüşüm fonksiyonu her zaman için analitik bir fonksiyondur. Dolayısıyla, faz geçişleri, ve analitik-olmayan özellikleri, sonsuz parçacık için geçerlidir, yani *termodinamik limit*te, $N \to \infty$. Dolayısıyla, faz geçişlerinin incelenmesi, serbest enerjideki çeşitli tekilliklerin temellerinin incelenmesi ve sınıflandırılması ile ilgilidir.

Faz geçişlerinin klasik bir örneği, bir gazın sıvıya yoğuşmasıdır. Sıvı-gaz yoğuşması geçişinin bazı önemli özellikleri:

(1) Sıcaklık/basınç düzleminde, (T, P), faz geçişi, *kritik nokta*da (T_c, P_c) biten bir doğru üzerinde olur.

(2) Hacim/basınç düzleminde, $(P, v \equiv V/N)$, geçiş, $T < T_c$ sıcaklıklarında, yoğunlukları $\rho_g = 1/v_g$ ve $\rho_s = 1/v_s$ olan bir gaz ve sıvı karışımına karşılık gelen bir *beraber varolma aralığı* olarak ortaya çıkar.

(3) Beraber varolma çizgisinin bitmesinden dolayı, gaz fazından, sıvı fazına, kritik noktanın etrafından dolanarak, sürekli olarak (faz geçişi olmadan) geçilebilir. Bu yüzden, sıvı ve gaz fazlar arasında temel bir fark yoktur.

Matematiksel açıdan, bir sistemin serbest enerjisi, faz sınırları boyunca yer alan bir tür dal kesiği dışında, (P, T) düzleminde analitik bir fonksiyondur. Ayrıca, kritik noktanın yakınındaki gözlemler göstermiştir ki:

(4) T_c'ye yaklaştıkça, beraber var olan sıvı ve gaz fazların yoğunluk farkları yok olur, yani $T \to T_c^-$ iken $\rho_{sıvı} \to \rho_{gaz}$

(5) Basınç-hacim eşsıcaklık eğrileri, yüksek sıcaklıklardan T_c'ye yaklaştıkça, giderek daha yatık hale gelirler. Bu, sabit sıcaklıktaki sıkıştırılabilirliğin, $\kappa_T = -\partial V/\partial P|_T/V$, $T \to T_c^+$ durumunda ıraksayacağı anlamına gelir.

(6) Kritikliğe yakınken, sıvı "sütümsü" görünür. *Kritik donukluk* olarak bilinen bu olay, gazın içindeki, yeterince uzun dalgaboylu kollektif dalgalanmaların ışığı saçtığını ima eder. Bu dalgalanmalar, pek çok parçacığı içermelidirler, ve dolayısıyla, bir kabalaştırma işlemi tasvirlerini yapmak için uygun olabilir.

İlgili, ama daha az bilinen, bir faz geçişi, demir ve nikel gibi bazı maddelerin paramanyetik ve ferromanyetik fazları arasında da olur. Bu malzemeler, belli bir Curie sıcaklığı, T_c, altında kendiliğinden mıknatıslanırlar. $T < T_c$ için, manyetik alan h sıfıra giderken, bu malzemelerin mıknatıslanmalarında bir süreksizlik vardır. (h, T) düzlemindeki faz diyagramının, ve mıknatıslanma eş-sıcaklık eğrilerinin $M(h)$, yoğunlaşma problemindeki denkleriyle çok benzerlikleri vardır. İki durumda da, süreksiz geçiş çizgisi kritik noktada son bulur, ve eş-sıcaklık eğrileri bu nokta civarında, tekil davranış sergiler. Mıknatısın faz diyagramı görüntü olarak daha basittir, çünkü, $h \mapsto -h$ simetrisi, kritik noktanın $h_c = M_c = 0$'da olmasını sağlar.

I.D Kritik Davranış

Kritik noktanın yakınlarındaki tekil davranış, bir gurup *kritik üstler* ile karakterize edilir. Bu üstler değişik termodinamik fonksiyonların analitik olmamalarını tanımlarlar. En sık karşılaşılan üstler aşağıda sıralanmıştır:

• **Düzen Parametresi:** Tanımı gereği, beraber varolma çizgisi üzerinde, birden fazla denge fazı vardır. Düzen parametresi, her fazda farklı olan bir termodinamik fonksiyondur, dolayısıyla, onları ayırt etmek için kullanılabilir. Bir mıknatıs için, mıknatıslanma

$$m(T) = \frac{1}{V} \lim_{h\to 0} M(h, T),$$

düzen parametresi olarak davranır. Sıfır alanda, m bir paramanyet için sıfır, ferromanyet için sıfırdan farklıdır, yani *indirgenmiş sıcaklık* t'yi $t = (T_c - T)/T_c$ olarak tanımlarsak:

$$m(T, h = 0) \propto \begin{cases} 0 & T > T_c \text{ için} \\ |t|^\beta & T < T_c \text{ için} \end{cases} \tag{I.20}$$

Dolayısıyla, beraber varolma çizgisi boyunca, düzen parametresinin tekil davranışı, β üsteli tarafından belirlenir. Kritik eş sıcaklık eğrisi üzerindeki m'nin tekil davranışı

$$m(T = T_c, h) \propto h^{1/\delta} \tag{I.21}$$

şeklinde tanımlanan bir başka üstel δ tarafından belirlenir.
Sıvı-gaz beraber varolma çizgisi üzerindeki iki faz, yoğunluklarıyla birbirlerinden ayrılırlar, ve yoğunluk farkı $\rho - \rho_c$, ρ_c kritik yoğunluk olmak üzere, düzen parametresi görevi görür.

• **Tepki Fonksiyonları:** Kritik bir sistem, dış tedirgemelere karşı oldukça hassastır, sıvı-gaz kritik noktasındaki sonsuz sıkıştırılabilirlikte olduğu gibi. Düzen parametresinin, eşlenik bir alana tepkisindeki ıraksama, üstel γ ile belirlenir. Mesela, bir mıknatısta,

$$\chi_\pm(T, h = 0) \propto |t|^{-\gamma_\pm} \tag{I.22}$$

burada, esas itibari ile, faz geçişinin iki tarafındaki ıraksamayı tanımlamak için iki γ_+ ve γ_- üstelleri gerekmektedir. Gerçekte, neredeyse bütün durumlarda, iki tarafta da aynı tekillik hakimdir ve $\gamma_+ = \gamma_- = \gamma$. Isı sığası, termal tepki fonksiyonudur, ve sıfır alanda tekilliği üstel α ile tanımlanır, yani

$$C_\pm(T, h = 0) \propto |t|^{-\alpha_\pm}. \tag{I.23}$$

• **Uzun-erimli Bağdaşıklık:** Tepki fonksiyonları, denge salınımlarıyla ilgili olduğu için, ıraksamaları, salınımların uzun mesafelerde bağdaşık olduğunu çağrıştırır. Manyetik alınganlığı göz önüne alarak bunu ispatlayacağız. h alanındaki (Gibbs) bölüşüm fonksiyonundan başlarsak, $Z(h) = \text{İz}\{\exp[-\beta\mathcal{H}_0 + \beta hM]\}$, mıknatıslanma $\langle M \rangle = \partial \ln Z/\partial(\beta h) = \text{İz}\{M \exp[-\beta\mathcal{H}_0 + \beta hM]\}/Z$ şeklinde hesaplanabilir. O zaman, alınganlık, mıknatıslanmanın değişimine

$$\begin{aligned} \chi = \frac{\partial M}{\partial h} &= \beta \left\{ \frac{1}{Z}\text{İz}[M^2 \exp(-\beta\mathcal{H}_0 + \beta hM)] - \frac{1}{Z^2}\text{İz}[M \exp(-\beta\mathcal{H}_0 + \beta hM)]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{k_B T}\left(\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2\right) \end{aligned} \tag{I.24}$$

olarak bağlıdır.

Genel mıknatıslanma, sistemin farklı kısımlarının katkılarının toplanması ile elde edilir, yani

$$M = \int d^3\vec{r} m(\vec{r}) \tag{I.25}$$

(Şimdilik, mıknatıslanmayı, skalar olarak kabul ediyoruz.) Yukarıdakini, denklem I.24'e yerleştirirsek

$$k_B T\chi = \int d^3\vec{r} d^3\vec{r}' (\langle m(\vec{r})m(\vec{r}')\rangle - \langle m(\vec{r})\rangle\langle m(\vec{r}')\rangle). \tag{I.26}$$

elde ederiz. Homojen bir sistemin, öteleme simetrisi, $\langle m(\vec{r})\rangle = m$'in bir sabit olmasını, ve $\langle m(\vec{r})m(\vec{r}')\rangle = G(\vec{r} - \vec{r}')$'in sadece ayrılmaya bağlı olmasını gerektirir. Sonucu,

$$\langle m(\vec{r})m(\vec{r}')\rangle_c \equiv \langle (m(\vec{r}) - \langle m(\vec{r})\rangle)(m(\vec{r}') - \langle m(\vec{r}')\rangle)\rangle = G(\vec{r} - \vec{r}') - m^2 \tag{I.27}$$

şeklinde tanımlanan *bağlantılı* bağdaşıklık fonksiyonları cinsinden ifade edebiliriz. Kütle merkezi koordinatı üzerinden denklem I.26'nın integrali, bir hacim çarpanı getirir ve alınganlık

$$\chi = \beta V \int d^3\vec{r} \langle m(\vec{r})m(0)\rangle_c \tag{I.28}$$

olarak bulunur.

Bağlantılı bağdaşıklık fonksiyonu, sistemin bir parçasındaki yerel dalgalanmaların, başka parçalardakileri nasıl etkilediğinin bir ölçüsüdür. Genellikle, bu tür etkiler, *bağdaşıklık uzunluğu*, ξ, denen karakteristik bir mesafeden olur. (Büyük ayrılmalarda, bu fonksiyonun sıfıra gitmesi gerektiği açıkça gösterilebilir; pek çok durumda $G_c(\vec{r}) \equiv \langle m(\vec{r})m(0)\rangle_c$, $|\vec{r}| > \xi$ olduğu durumda $\exp(-|\vec{r}|/\xi)$ gibi sıfıra gider.) g, $|\vec{r}| < \xi$ için, bağdaşıklık fonksiyonunun tipik bir değerini göstersin. Denklem I.28'den, $k_B T\chi/V < g\xi^3$ olduğu, ve $\chi \to \infty$ durumunda, $\xi \to \infty$ olması gerektiği açıktır. Bağdaşıklık fonksiyonundaki bu ıraksama, kritik bulanıklığı da açıklamaktadır. Bağdaşıklık fonksiyonu, saçılma araştırmalarıyla ölçülebilir ve ıraksaması

$$\xi_\pm(T, h = 0) \propto |t|^{-\nu_\pm}, \tag{I.29}$$

$\nu_+ = \nu_- = \nu$ üstelleri ile kontrol edilir.

II. LANDAU-GİNZBURG YAKLAŞIMI

II.A Giriş

Bir önceki bölümde, termodinamik fonksiyonların, kritik noktadaki (beraber varolma çizgisinin sonu) tekil davranışlarının, bir küme kritik üstellerle $\{\alpha, \beta, \gamma, \cdots\}$ karakterize edilebileceğinden bahsetmiştik. Deneysel gözlemler, bu üstellerin oldukça *evrensel*, yani incelenen malzemeden ve, bir raddeye kadar, faz geçişinin doğasından bağımsız, olduğunu göstermektedir. Mesela, CO_2'nin yoğuşmasındaki beraber varolma sınırının sonu ile bir protein çözeltisinin seyreltilmiş ve yoğun bileşenlerine ayrılması, aynı tekil davranışı göstermektedir. Bu evrensel davranışın açıklanması gerekmektedir. Ayrıca, tepki fonksiyonlarının ıraksamasının, dalgalanmaların saçılmalarla doğrudan incelemeleriyle beraber, kritik noktanın yakınlarında bağdaşıklıkların uzun erimli bir hal aldıklarını gösterdiğinden de bahsettik. Böyle bağdaşık salınımlar pek çok parçacığı içerir ($\xi \gg a$, a parçacıklar arası tipik bir uzaklık olmak üzere), ve, esneklik kuramındaki anlamıyla, bir kabalaştırma tasvirleri için uygun olabilir. Burada, böyle bir *istatistiksel alan teorisi* oluşturacağız.

Sonuçlar daha genel olmakla beraber, tartışmalarımızı, simetrileri daha açık olan manyetik sistem etrafında yapacağız. Curie noktasına yakın bir metal, demir diyelim, düşünelim. Mıknatıslanmanın mikroskopik temeli, kuantum mekanikseldir, gezici elektronlar, onların spinleri ve dışlama ilkesi gibi elemanlar içerir. Açıkça, mikroskopik bir tasvir oldukça karışık, ve malzeme bağımlıdır. Böyle bir kuram, hangi elementlerin ferromanyetizmaya sahip olduğunu bulmak için gereklidir. Ancak, böyle bir davranış varsa, mikroskopik teori bunun termal salınımlar sonucu yok olmasını açıklamak için mutlaka faydalı değildir. Bunun sebebi etkileşen elektron topluluğunun (kuantum) istatistiksel mekaniğinin fazlasıyla karmaşık olmasıdır. Curie noktası yakınında, istatistik mekaniği faz geçişinden sorumlu olan, önemli serbestlik dereceleri, spinlerin uzun dalgaboylu kollektif uyarımlarıdır (düşük sıcaklıklarda, ısı sığasını domine eden uzun dalgaboylu fononlar gibi). Bu sebepten, mıknatısı ağ aralığından çok daha büyük ölçeklere kabalaştırabiliriz, ve parçacık spinlerinin $\mathbf{x}$ yakınlarındaki ortalamalarını gösteren mıknatıslanma $\vec{m}(\mathbf{x})$'i tanımlayabiliriz. Burada, her ne kadar $\mathbf{x}$ sürekli bir değişken gibi düşünülse de, $\vec{m}$ fonksiyonu, ağ aralığı mertebesindeki mesafelerde herhangi bir değişim göstermez, yani Fourier dönüşümü, sadece, $\Lambda \sim 1/a$ üst sınırına kadar dalga-sayılarını içerir.

Başka tür faz geçişlerini tasvir ederken, $\vec{m}(\mathbf{x})$ rolünü, uygun düzen parametresi yoğunluğu alır. Bu yüzden, d boyutta var olan, n-bileşenli spinler için genelleştirilmiş mıknatıslanmayı incelemek faydalıdır, yani:

$$\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \cdots, \mathbf{x_d}) \in \Re^{\mathbf{d}} \quad \text{(uzay)} \quad , \quad \vec{\mathbf{m}} \equiv (\mathbf{m_1}, \mathbf{m_2}, \cdots, \mathbf{m_n}) \in \Re^{\mathbf{n}} \quad \text{(spin)}$$

Bu çerçevede kapsanan problemler:

n=1 sıvı-gaz geçişlerini, ikili karışımları, ve tek eksenli mıknatıslanmayı tasvir eder

n=2 süperakışkanlık, süper iletkenlik ve düzlemsel mıknatısları tasvir eder

n=3 klasik mıknatıslara karşılık gelir

Fiziksel durumların çoğu üç boyutta ($d = 3$) olsa da, yüzeylerde ($d = 2$), ve tellerde ($d = 1$) de önemli olaylar vardır. Göreceli alan teorisi de benzer bir yapıyla tasvir edilir, ancak $d = 4$'te.

Deforme olmuş katıda olduğu gibi, uygun simetriler üzerinden yerel etkin Hamiltoniyeni $\beta\mathcal{H}[\vec{m}] = \int d^d\mathbf{x}\Phi[\vec{m}(\mathbf{x})]$ oluşturalım. Malzemenin, *düzgün* ve *yön bağımsız* olduğunu varsayacağız, böylece $\mathbf{x}$ uzayındaki bütün yönler ve noktalar özdeş olacak. Dış bir manyetik alanın olmadığı durumda, mıknatıslanma için bütün yönler özdeştir, ve böylece, n-boyutlu uzaydaki herhangi bir R_n dönmesi için, $\mathcal{H}[R_n\vec{m}(\mathbf{x})] = \mathcal{H}[\vec{m}(\mathbf{x})]$. $\Phi[\vec{m}(\mathbf{x})]$'nin açılımında var olabilecek, bu simetriyle tutarlı bazı terimler:

$$m^2(\mathbf{x}) \equiv \vec{m}(\mathbf{x}) \cdot \vec{m}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{x})m_i(\mathbf{x}) \quad , \quad m^4(\mathbf{x}) \equiv \left(m^2(\mathbf{x})\right)^2 \quad , \quad m^6(\mathbf{x}) \quad , \quad \cdots \quad ,$$

$$(\nabla\vec{m})^2 \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{d} \partial_\alpha m_i \partial_\alpha m_i \quad , \quad (\nabla^2\vec{m})^2 \quad , \quad m^2(\nabla\vec{m})^2 \quad , \quad \cdots \quad .$$

Dönmesel simtriyi kıran, küçük bir manyetik alan da eklersek, Φ'nin açılımındaki en düşük mertebeden terimler *Landau-Ginzburg* Hamiltoniyen'i olarak bilinen

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{t}{2}m^2(\mathbf{x}) + um^4(\mathbf{x}) + \frac{K}{2}(\nabla m)^2 + \cdots - \vec{h}\cdot\vec{m}(\mathbf{x})\right] \tag{II.1}$$

ifadesini verir. (Manyetik alan, ayrıca daha yüksek mertebeden, $m^2\vec{m}\cdot\vec{h}$ ile orantılı terimler de yaratır, ancak bu terimler um^4 teriminden daha az önemlidir.)

Denklem II.1 sadece simetri temelinde oluşturulmuştur, ve bir gurup *olgusal* parametreye $\{t,\ u,\ K,\ \cdots\}$ bağlıdır. Bu parametreler, evrensel olmayan mikroskopik etkileşimlerin ve *sıcaklık ve basınç gibi dış parametrelerin* bir fonksiyonudur. Genelde, pek çok kafa karışıklığının sebebi olan ikinci noktayı tam olarak kavramak gerekir. Belli bir konfigürasyonun olasılığı Boltzmann ağırlığı $\exp\{-\beta\mathcal{H}[\vec{m}(\mathbf{x})]\}$ ile verilir. Bu, üsteldeki bütün terimlerin $(k_BT)^{-1}$ ile orantılı olduğu anlamına *gelmez*. Bu bağımlılık, sadece gerçek mikroskopik Hamiltoniyen için geçerlidir. Landau-Ginzburg Hamiltoniyen'i daha ziyade, mikroskopik serbestlik derecelerin ortalamalarını $\vec{m}(\mathbf{x})$'e sabitleyerek, üzerlerinden integral alarak (kabalaştırma) elde edilen bir etkin serbest enerjidir. Temel prensiplere dayanarak böyle bir programı uygulamanın zorluğundan dolayı, sonuç olarak elde ettiğimiz etkin serbest enerjiyi sadece simetrileri kullanarak oluşturdur. Ödediğimiz bedel, olgusal parametrelerin, özgün mikroskopik parametrelere, sıcaklık gibi dışsal parametrelere bilmediğimiz bir bağımlılığı olmasıdır (çünkü, kabalaştırma sürecinde kaybolan kısa mesafeli salınımların entropisini göz önüne almamız gerekmektedir).

II.B Semer Noktası Yaklaşımı, ve Ortalama-Alan Kuramı

Asıl problem, denklem II.1'deki Landau-Ginzburg Hamiltoniyen'i tarafından tasvir edilen kabalaştırılmış mıknatıslanmaya odaklanarak oldukça basitleştirildi. Çeşitli termodinamik fonksiyonlar (ve tekil davranışları), ilgili bölüşüm fonksiyonundan elde edilebilir:

$$Z = \int \mathcal{D}\vec{m}(\mathbf{x}) \exp\{-\beta\mathcal{H}[\vec{m}(\mathbf{x})]\} \tag{II.2}$$

Hamiltoniyen'de görünen serbestlik dereceleri $\mathbf{x}$'in fonksiyonları olduğu için, $\int \mathcal{D}\vec{m}$ sembolü, *fonksiyonel integral* anlamına gelir. Gerçekte, fonksiyonel integral, kesikli integrallerin bir limiti olarak düşünülmelidir. x koordinatını $\mathcal{N}$ tane, aralarındaki mesafe a olan i noktalarından oluşan bir ağ üzerine kesikli hale getirdikten sonra

$$\int \mathcal{D}m(x)\mathcal{F}\left[m(x),\ \frac{\partial m}{\partial x},\ \cdots\right] \equiv \lim_{\mathcal{N}\to\infty} \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} dm_i \mathcal{F}\left[m_i,\ \frac{m_{i+1}-m_i}{a},\ \cdots\right].$$

(Fonksiyonel integrallerin varlığı ile ilgili bazı endişeler vardır. Problem, kısa mesafelerde, çok kötü davranan fonksiyonların var olmasına yol açan, çok fazla serbestlik derecesinin olması ile ilgilidir. Bu konular bizi ilgilendirmemelidir, çünkü temel problemin kısa mesafe davranışını sınırlayan iyi tanımlı bir ağ aralığına sahiptir.)

Landau-Ginzburg bölüşüm fonksiyonunun hesabı yine de zordur. İlk adım olarak, denklem II.2'deki integralin, integrali alınan ifadenin en büyük değeri ile yer değiştirdiği *semer noktası yaklaştırması*nı uygularız. Bir mıknatıstaki etkileşimlerin doğal eğilimi, mıknatıslanma vektörlerini paralel tutmaktır, dolayısıyla, denklem II.1'deki K sabitinin pozitif olmasını bekleriz. İntegrali alınan ifadenin en büyük değerini almasına yol açan $\vec{m}$ düzeni düzgündür, ve

$$\beta F = -\ln Z \approx V \min\{\boldsymbol{\Psi}(m)\}_m \tag{II.3}$$

Düzgün mıknatıslanma

$$\boldsymbol{\Psi}(m) \equiv \frac{t}{2}m^2 + um^4 + \cdots - \vec{h}\cdot\vec{m} \tag{II.4}$$

ifadesinin en küçük değerini aldığı $\vec{m}(\mathbf{x}) = \bar{m}\hat{h}$ değerinde olur.

Kritik noktanın civarındaki m küçüktür, ve $\boldsymbol{\Psi}(m)$'in açılımındaki en düşük kuvvetleri almak yeterlidir. (Daha sonra, ihmal edilen terimlerin gerçekten de küçük olduklarını tutarlı olarak kontrol edebiliriz.) $\boldsymbol{\Psi}(m)$'in davranışı, t parametresinin işaretine çok bağlıdır.

(1) $t > 0$ için, dördüncü mertebeden terimi ihmal edebiliriz, ve en küçük değer $\bar{m} \approx \vec{h}/t$'de olur. Mıknatıslanmanın $\vec{h} \to 0$ iken sıfıra gitmesi, paramanyetik davranışı işaret eder. Alınganlık $\chi = 1/t$, $t \to 0$ iken ıraksar.

(2) $t < 0$ için, kararlılığı (yani sonlu mıknatıslanmayı) garantilemek için, pozitif bir u değerli dördüncü mertebeden terime gerek vardır. $\boldsymbol{\Psi}(m)$'in, $\bar{m}$'in sıfırdan farklı değerlerinde,

yozlaşmış en küçük değerleri vardır. Bu sebeple, ferromanyetik davranışa işaret eden, $\vec{h}=0$ olsa bile, kendiliğinden mıknatıslanması vardır. $\vec{m}$'in yönü, sistemin hazırlanması ile belirlenir, ve harici bir $\vec{h}$ alanı ile yeniden düzenlenebilir.

Bu şekilde, Landau-Ginzburg bölüşüm fonksiyonunun semer noktası hesabı, $t>0$ için paramanyetik, $t<0$ için ferromanyetik davranışlara yol açar. Böylece, Landau-Ginzburg Hamiltoniyen'inin faz diyagramını, bir mıknatısın faz diyagramına

$$\begin{aligned} t(T,\cdots) &= a(T-T_c)+\mathcal{O}(T-T_c)^2, \\ u(T,\cdots) &= u+u_1(T-T_c)+\mathcal{O}(T-T_c)^2; \end{aligned} \tag{II.5}$$

olarak tanımlayarak eşleştirebiliriz; burada a ve u malzemeye bağlı bilinmeyen pozitif sabitlerdir. Temel fikir, olgusal parametrelerin, $T-T_c$ cinsinden Taylor açılımı yapılabilinen sıcaklığın fonksiyonu olmalarıdır. Deneysel faz diyagramlarını elde edebilmek için gereken asgari koşullar, denklem II.5'de kapsanmaktadir. Açılımdaki başka bazı terimlerin, a veya u gibi, sıfır olması tabi ki mümkündür. Ancak bunlar, genel olmayan, ve muhtemelen başka sistem parametreleri değiştirerek ortadan kaldırılabilen durumlardır.

Şimdi, denklemler II.3 ve II.4 tarafından öngörülen tekil davranışları inceleyelim.

• **Mıknatıslanma:** Sıfır alanda, $\partial\mathbf{\Psi}/\partial m = t\bar{m}+4u\bar{m}^3=\bar{m}(t+4u\bar{m}^2)=0$'dan,

$$\bar{m}=\begin{cases} 0 & t>0 \text{ için} \\ \sqrt{\frac{-t}{4u}} & t<0 \text{ için} \end{cases} \tag{II.6}$$

elde ederiz. Böylece, evrensel üsteli $\beta=1/2$ olarak buluruz, genliği ise malzeme bağımlıdır.

• **Isı Sığası:** Serbest enerji ($h=0$)

$$\frac{\beta F}{V}=\min\mathbf{\Psi}(m)=\begin{cases} 0 & t>0 \text{ için} \\ -\frac{t^2}{16u} & t<0 \text{ için} \end{cases} \tag{II.7}$$

olarak verilir. $t=a(T-T_c)+\cdots$; $\partial/\partial T\propto\partial/\partial t$ olduğu için ve

$$C=-T\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\propto-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\beta F}{V}\right)=\begin{cases} 0 & t>0 \text{ için} \\ \frac{1}{8u} & t<0 \text{ için} \end{cases} \tag{II.8}$$

Isı sığasında bir ıraksama yerine bir süreksizlik görürüz. Eğer tekilliği bir kuvvet yasası ile tasvir etmekte ısrar edersek, üsteli $\alpha=0$ olarak seçmeliyiz.

• **Alınganlık:** $\vec{h}$'nin varlığında, $\vec{m}=\bar{m}(h)\hat{h}$ olmasını bekleriz, ve $\partial\mathbf{\Psi}/\partial m=0$'dan, $t\bar{m}+4u\bar{m}^4=h$ elde ederiz. Dolayısıyla

$$\chi_b^{-1}=\left.\frac{\partial h}{\partial\bar{m}}\right|_{h=0}=t+12u\bar{m}^2=\begin{cases} t & t>0 \text{ için,} \\ -2t & t<0 \text{ için} \end{cases}. \tag{II.9}$$

Böylece, alınganlıktaki tekillik, $\gamma_+=\gamma_-=1$ olmak üzere, $\chi_\pm\sim A_\pm|t|^{-\gamma_\pm}$ olarak tanımlanabilir. $A_\pm$ genlikleri malzeme bağımlı olmakla beraber, oranlarının $A_+/A_-=2$ olarak evrensel olduğu öngörülür. (Daha sonradan göreceğimiz gibi, şimdiye kadar hesapladığımız, *boylamsal alın-*

*ganlık*tır. Ayrıca, T_c'nin altında her zamana sonsuz olan *enine alınganlık* da vardır.)

• **Durum Denklemi:** Kritik eş-sıcaklık eğrilerinde $t = 0$, mıknatıslanma $\bar{m} = (h/4u)^{1/3}$ olarak davranır, yani

$$\bar{m}(t = 0, h) \sim h^{1/\delta}, \quad \delta = 3 \text{ olmak üzere.} \tag{II.10}$$