8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

# IV.H Diğer Etkileşimlerin Önemsizliği

$\mathcal{O}(\epsilon)$ mertebesinde sabit nokta Hamiltoniyeninin(denklem IV.55'den) sadece üç parametresi vardır:

$$\beta\mathcal{H}^* = \frac{K}{2}\int_\Lambda d^d\mathbf{x}\left[(\nabla m)^2 - \frac{(n+2)}{(n+8)}\epsilon\Lambda^2 m^2 + \frac{\epsilon\Lambda^{-\epsilon}}{2(n+8)}\frac{K}{K_4}m^4\right] \tag{IV.65}$$

ve konulan $\Lambda \sim 1/a$ sınırına bağlıdır (üstellerden farklı olarak). Ancak, bölüm III.E'de de anlatıldığı gibi, RG'nin başlama noktası simetrilerle tutarlı en genel Hamiltoniyen olmalıdır. Bu terimlerin bir kısmı ilk Hamiltoniyenin dışında tutulsa da, kabalaştırma tarafından yaratıldığını keşfettik. $u$'da ikinci mertebede, $m^6$ ile orantılı olan terimler yaratıldı; $u$'da daha yüksek mertebelerde, $m$'nin daha yüksek kuvvetleri de ortaya çıkacaktır.

$\vec{h} = 0$ için, küresel simetrik Hamiltoniyene odaklanalım. Bu simetriye sahip bütün terimleri $\beta\mathcal{H} = \beta\mathcal{H}_0 + \mathcal{U}$ alarak tedirgemeli RG'ye dahil edebiliriz, ki burada

$$\beta\mathcal{H}_0 = \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{t}{2}m^2 + \frac{K}{2}(\nabla m)^2 + \frac{L}{2}(\nabla^2 m)^2 + \cdots\right] \tag{IV.66}$$

bütün ikinci mertebeden (Gaussiyen) terimleri kapsarken, geriye kalan yüksek mertebeden terimler

$$\mathcal{U} = \int d^d\mathbf{x}\left[u m^4 + v m^2(\nabla m)^2 + \cdots + u_6 m^6 + \cdots + u_8 m^8 + \cdots\right] \tag{IV.67}$$

tedirgemesi içine yerleştirilmiştir. Kabalaştırmadan, ve gerçek uzaydaki RG'nin (ii). ve (iii). adımlarından, $\mathbf{x} = b\mathbf{x}'$ ve $\tilde{\vec{m}} = \zeta\vec{m}'$ sonra, renormalize edilmiş ağırlıklar

$$\begin{cases} t & \mapsto & b^d\zeta^2\tilde{t} = b^2\tilde{t} \\ K & \mapsto & b^{d-2}\zeta^2\tilde{K} = K \\ L & \mapsto & b^{d-4}\zeta^2\tilde{L} = b^{-2}\tilde{L} \\ & \vdots & \\ u & \mapsto & b^d\zeta^4\tilde{u} = b^{4-d}\tilde{u} \\ v & \mapsto & b^{d-2}\zeta^4\tilde{v} = b^{2-d}\tilde{v} \\ & \vdots & \\ u_6 & \mapsto & b^d\zeta^6\tilde{u}_6 = b^{6-2d}\tilde{u}_6 \\ u_8 & \mapsto & b^d\zeta^8\tilde{u}_8 = b^{8-3d}\tilde{u}_8 \\ & \vdots & \end{cases} \tag{IV.68}$$

İkinci küme eşitlikler, $K' = K$ olacak şekilde $\zeta^2 = b^{2-d}K/\tilde{K} = b^{2-d}\left[1 + \mathcal{O}(u^2, uv, v^2, \cdots)\right]$ seçerek elde edilir. Çok küçük bir ölçekleme seçerek, yineleme bağıntıları diferansiyel şeklini alır:

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\ell} &= 2t + \mathcal{O}(u, v, u_6, u_8, \cdots) \\ \frac{dK}{d\ell} &= 0 \\ \frac{dL}{d\ell} &= -2L + \mathcal{O}(u^2, uv, v^2, \cdots) \\ &\vdots \\ \frac{du}{d\ell} &= \epsilon u - Bu^2 + \mathcal{O}(uv, v^2, \cdots) \\ \frac{dv}{d\ell} &= (-2+\epsilon)v + \mathcal{O}(u^2, uv, v^2, \cdots) \\ &\vdots \\ \frac{du_6}{d\ell} &= (-2+2\epsilon)u_6 + \mathcal{O}(u^3, u_6^2, \cdots) \\ \frac{du_8}{d\ell} &= (-4+3\epsilon)u_8 + \mathcal{O}(u^3, u^2u_6, \cdots) \\ &\vdots \end{cases} \tag{IV.69}$$

Bu yineleme bağıntıları, iki sabit noktayı tasvir ederler:
**(i)** Guassiyan sabit noktasının, $t^* = L^* + u^* = v^* = \cdots = 0$ ve $K \neq 0$, sahip olduğu özdeğerler

$$y_t^0 = 2,\ y_L^0 = -2,\ \cdots,\ y_u^0 = +\epsilon,\ y_v^0 + -2+\epsilon,\ \cdots,\ y_6^0 = -2+2\epsilon,\ y_8 = -4+3\epsilon,\ \cdots \tag{IV.70}$$

**(ii)** Denkemler IV.69'u sıfıra eşitlersek, banal olmayan bir sabit nokta,

$$t^* \sim u^* \sim \mathcal{O}(\epsilon), \quad L^* \sim v^* \sim \cdots \sim \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad u_6^* \sim \cdots \sim \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad \cdots \tag{IV.71}$$

noktasında bulunur. Bu noktanın kararlılığı

$$\frac{d}{d\ell}\begin{pmatrix} \delta t \\ \delta L \\ \vdots \\ \delta u \\ \delta v \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\mathcal{O}(u^*) & \mathcal{O}(\epsilon) & \cdots & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & \cdots \\ \mathcal{O}(\epsilon^2) & -2+\mathcal{O}(\epsilon) & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \mathcal{O}(\epsilon^2) & \mathcal{O}(\epsilon) & & & & \\ \mathcal{O}(\epsilon^2) & \mathcal{O}(\epsilon) & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta t \\ \delta L \\ \vdots \\ \delta u \\ \delta v \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{IV.72}$$

matrisi ile belirlenir.

$\epsilon \to 0$ iken, banal olmayan sabit kısım, özdeğerleri ve özdoğrultuları, sürekli olarak Gaussiyan sabit noktaya giderler. Dolayısıyla, özdeğerler sadece $\epsilon$ mertebesinde düzeltilebilirler, ve denklem IV.70

$$\begin{gathered} y_t = 2 - \frac{n+2}{n+8}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \qquad y_L = -2 + \mathcal{O}(\epsilon),\ \cdots, \\ y_u = -\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2),\ y_v = -2+\mathcal{O}(\epsilon),\ \cdots\ , y_6 = -2+\mathcal{O}(\epsilon),\ y_8 = -4+\mathcal{O}(\epsilon) \end{gathered} \tag{IV.73}$$

halini alır. Özdeğerler, hala, Landau-Ginzburg açılımındaki çeşitli terimlerin katsayıları ile işaretlenmişken, gerçek özdeğerlerin bu parametre uzayının eksenlerinden uzağa dönderilmiş olduklarını, en büyük bileşenleri bu eksene paralel olsa da, hatırlamalıyız.

$d < 4$'te, Gaussiyan sabit noktasının iki tane önemli doğrultusu olduğu halde, genelleştirilmiş $O(n)$ sabit noktasının sadece bir tane, $y_t$'ye karşılık gelen önemli doğrultusu vardır. En azından, tedirgemede, bu sabit noktanın çekim havzasının koboyutu birdir, ve bundan dolayı faz geçişini tasvir eder. Kadanoff'un ilk kavramı böylece gerçekleşmiş olur ve üstellerin evrenselliği çok sayıda diğer olası etkileşimlerin önemsizliğine (tedirgemeli olarak) bağlanmıştır. Tedirgeme yaklaşımı, bu parametrelerin sonlu değerlerindeki başka sabit noktaların olabileceğini reddetmez. Bu ana kadar, her evrensellik sınıfındaki kritik üstellerin tekliği, ve $\epsilon$ açılımı ile hesaplanan değerlere yakınlığı, böyle *tedirgemesiz* sabit noktaların varlığını varsaymanın gereksiz olduğunu ima eder.

## IV.I $\epsilon$-Açılımı Üzerine Yorumlar

RG'nin Landau-Ginzburg Hamiltoniyen'i için uygulanması 1970'lerde K. G. Wilson tarafından başarılmıştır; $\epsilon$-açılımı M.E. Fisher ile beraber geliştirilmiştir. Bu, bu konuda faaliyet fırtınasına yol açtı ve bu hala devam etmektedir. 1982 yılında Wilson'a Nobel ödülü verilmiştir. Tarihsel detaylar, Rev. Mod. Phys. **55**, 582 (1983)'de yeniden basılan Nobel konuşmasında bulunabilir. Bu aşamada, $\epsilon$-açılımı ile ilgili bir kaç yorum sıradadır:

**1.** *Daha Yüksek Mertebeler, ve Serinin Yakınsaması:* $\mathcal{O}(\epsilon)^2$ ve ötesinde üstelleri, $\mathcal{U}^3$ mertebesine ve daha ötesine giderek hesaplamak, çok daha fazla etkileşimi göz önüne almamızı gerektiği için oldukça karmaşıktır. Aslında, RG'nin ara basamaklarının açıkça sınır ölçeği $\Lambda$'ya bağlı olup, son üstellerin bağımsız olması gayet nahoştur. Aslında, bu zorlukların çoğundan uzak duran, bir dizi alan kuramsal RG şeması vardır (boyutsal düzenleme, öncül ıraksamaları toplama, vb.). Bütün yüksek mertebe hesapları, bu şemalardan biri kullanılarak yapılıyor. Bazen (her zaman değil), bu yaklaşımların birbirleriyle tutarlı olduklarını, ve her mertebeye kadar yapılabileceğini ispatlamak mümkündür. Aslen, $d = 3$ boyutta kritik üstel hesaplama problemi çözülmüştür: basit hesaplar yaklaşık sonuçlar verir, daha hassas hesapların daha iyi sonuçlar vermesi gerekir. Durum, az çok, He atomunun kesin olarak hesaplanamayan, ancak çeşitli yaklaştırma metodları ile yeterli hassaslığa kadar hesaplanabilen, enerji düzeylerini bulmaya benzer.

Üstellerin ne kadar güvenilir olduğunu tahmin etmek için, serinin yakınsaması ile ilgili bilgiye ihtiyacımız vardır. $\epsilon$ açılımı, beşinci mertebeya kadar yapılmıştır, ve $\gamma$ için $n = 1$ de $d = 3$ için sonuçlar:

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 + 0.167\epsilon + 0.077\epsilon^2 - 0.049\epsilon^3 + 0.180\epsilon^4 - 0.415\epsilon^5 \\ 1.2385 \pm 0.0025 &= 1.000, \quad 1.167, \quad 1.244, \quad 1.195, \quad 1.375, \quad 0.96 \end{aligned} \tag{IV.74}$$

İkinci satır, değişik mertebelerde, $\epsilon = 1$ yerleştirerek elde edilen değerleri, $d = 3$'deki $\gamma \approx 1.2385$ en iyi tahmini ile gösterir. Serinin elemanlarının değişen işaretleri olduğuna dikkat ediniz. $\epsilon = 1$'de hesaplanan kesilmiş seri, üçüncü mertebeye kadar iyileşir, ondan sonra salınmaya, ve sol taraftan uzaklaşmaya başlar. Bunlar *asimptotik seri*lerin karakteristik özelliğidir. Büyün $p$ için, çoğu niceliğin katsayısının $|f_p| \sim cp!a^{-p}$ şeklinde ölçeklendiği ispatlanabilir. Sonuç olarak, $\epsilon$ açılımı *yakınsamaz*, ancak $\int dx d^p e^{-x} = p!$ özdeşliğini kullanarak, *Borel toplama* yöntemi ile hesaplanabilir:

$$f(\epsilon) = \sum_p f_p \epsilon^p = \sum_p f_p \epsilon^p \frac{1}{p!} \int_0^\infty dx x^p e^{-x} = \int_0^\infty dx e^{-x} \sum_p \frac{f_p(\epsilon x)^p}{p!} \tag{IV.75}$$

Son toplama (ki yakınsar), integrali alındığında $f(\epsilon)$'u veren bir fonksiyon verir. $d = 3$ boyuttaki üstellerin oldukça iyi tahminleri, yukarıda alıntılanan $\gamma$ gibi, bu toplama yöntemi ile elde edilmiştir. Üstellerde, alt kritik boyut olan $d = 2$'ye karşılık gelen, $\epsilon = 2$'ye kadar herhangi bir tekillik işareti yoktur.

**2.** $1/n$ *açılımı:* Sabit nokta konumu

$$u^* = \frac{(t^* + K\Lambda^2)^2(4-d)}{4(n+8)K_d\Lambda^d}$$

$n \to \infty$ iken yok olur. Bu ise, kritik üstellerin kontrollü bir şekilde $1/n$ cinsinden açılmasının mümkün olduğunu ima eder. Gerçekten de böyle bir açılım birkaç metodla geliştirilebilir, Hamiltoniyen'in $n$'ye üstel bağımlılığından faydalanan semer noktası açılımı, ya da tedirgeme açılımının kesin yeniden toplanması ile. Denklem IV.58, bu limitte

$$y_t = \lim_{n\to\infty}\left[2 - \frac{n+2}{n-8}(4-d)\right] = d-2, \quad \Longrightarrow \quad \nu = \frac{1}{d-2} \tag{IV.76}$$

verir. bu sonuç $4 < d < 2$ boyutlarında kesindir. Dört boyutun üstünde, ortalama alan değeri $1/2$ yeniden elde edilirken, $d < 2$ için düzen yoktur.