

MIT Açık Ders Malzemesi
<http://ocw.mit.edu>

8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

Bu malzemeye atıfta bulunmak ve Kullanım Şartlarımızla ilgili bilgi almak için
<http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://tuba.acikders.org.tr> sitelerini ziyaret ediniz.

I. Kollektif Davranış, Parçacıklardan Alanlara

I.A Giriş

Bu dersin ilk kısmının amacı, temel mikroskopik yasalarla, makroskopik boyutlardaki gözlemlenen olaylar arasında köprü oluşturan istatistiksel mekaniğin prensiplerini tanıtmaktır.

Mikroskopik Fizik büyük miktardaki serbestlik derecesi ile karakterize edilir; mesela bir gazdaki parçacıkların konum ve momentumlarının kümesi, $\{\vec{p}_i, \vec{q}_i\}$, bir mıknatısındaki spinlerin dizilimleri $\{\vec{s}_i\}$, veya büyük kanonik topluluktaki doldurma sayıları $\{n_i\}$. Bu serbestlik derecelerinin evrimi, temel bir Hamiltoniyen, \mathcal{H} tarafından belirlenir.

Makroskopik Fizik genel olarak, basınç P , hacim V , sıcaklık T , iç enerji E , entropi S , vb. gibi, termodinamik yasalarına uyan bir kaç denge durum değişkeni tarafından tanımlanır.

İstatistiksel mekanik, bu iki alan arasında olasılıkla bir bağlantı sunar. Mesela, T sıcaklığındaki kanonik toplulukta, sistemin her μ mikro durumu $p(\mu) = \exp(-\beta\mathcal{H}(\mu))/Z$, $\beta = (k_B T)^{-1}$ olmak üzere, olasılıkla ortaya çıkar. Toplam olasılığın birime normalize olmasını garanti etmek için $Z(T)$ 'nin $\sum_{\mu} \exp(-\beta\mathcal{H}(\mu))$ 'ye eşit olması gerekir. Sistemin *makroskopik* durumu ile ilgili termodinamik bilgi, *serbest enerji* $F = -k_B T \ln Z$ 'den elde edilir.

Yukarıdaki plan, sadece bir kaç basit sistem, çoğu, dağılım fonksiyonu kesin olarak hesaplanabilen etkileşmeyen parçacıklardan oluşan, için tamamiyle uygulanabilir. Etkileşmelerin bir kısım etkileri bu kesin çözümler etrafında tedirgeme yapılarak dahil edilebilir. Ancak, görece basit olan mükemmel olmayan gaz için bile, tedirgeme yöntemi, yoğunlaşma noktası yakınında işe yaramaz. Diğer taraftan, tam da, etkileşmelerden kaynaklanan yeni fazlar ve özellikler makroskopik fiziği ilginç kılar. Özellikle şu problemleri ele almak isteriz:

- (1) Termodinamik limitte ($N \rightarrow \infty$), kuvvetli etkileşimler, maddenin yeni fazlarına sebep olur. En basit sıvı-gaz geçişini bir miktar inceledik, ancak katı, sıvı-kristal, mıknatıs, süper iletken, vb. pek çok ilginç faz vardır. Temelde yatan parçacıklar arası etkileşimlerden, bu kadar farklı makroskopik davranışların ortaya çıkmasını nasıl açıklayabiliriz? Bu makroskopik fazları tanımlayan termodinamik değişkenler nelerdir; ve bunların büyük kütleli tepki fonksiyonlarındaki (ısı sıçması, alınganlığı, vb.) izleri nelerdir?
- (2) Sistemin, düşük enerji uyarılmalarının özellikleri nelerdir? Katılardaki veya süper akışkan helyumdaki fononlarda olduğu gibi, düşük enerji uyarılmaları genelde, pek çok mikroskopik serbestlik derecesinin (parçacıkların) birlikte hareketini içeren *kollektif modlar*dır. Bu modlar, termal salınımlar ile rahatlıkla uyarılırlar, ve saçılma deneyleriyle ölçülebilirler.

Parçacıkların etkileşimi için yazılan temel mikroskopik Hamiltoniyen genelde çok karışıktır ve probleme, parçacıklardan başlayan temel (*ab initio*) bir yaklaşımı altından kalkılamaz bir hale getirir. Yine de, böyle pek çok sistemin makroskopik davranışında, istatistiksel mekanik metodları ile verimli bir şekilde incelenebilecek ortak pek çok özellik vardır. Mikroskopik boyutta,

parçacıkların aralarındaki etkileşimleri çok farklı olduğu halde, pek çok parçacığın ortalamasını aldığımızda, daha basit bir tasvirin ortaya çıkması beklenebilir. (Merkezi limit kuramının, pek çok raslantısal değişkenin toplamının basit bir Gauss dağılımı göstermesini garanti ettiği gibi). Bu beklenti, gerçekten de, uzun dalga boylarında ve uzun zamanlarda incelendiğinde etkileşen sistemlerin toplu davranışlarının basitleştiği pek çok sistemde haklı çıkar. (Buna, bazen, sıvı denklemleri için Navier-Stokes denklemlerine benzetilerek *hidrodinamik limit* denir.) Bu uzunluk ve zaman skalalarına uygun ortalama değişkenler artık kesikli parçacık serbestlik dereceleri değildir; yavaş değişen sürekli *alanlar*dır. Örnek olarak, Navier-Stokes denklemlerinde ortaya çıkan hız alanı, sıvıdaki tek tek parçacıkların hızlarından oldukça farklıdır. Dolayısıyla, etkileşimli sistemlerin kolektif modlarını incelemek için verimli yöntem Alanların İstatistiksel Mekaniği'dir. Bu sebeple, bu dersin programı:

- **Amaç:** Maddenin durumlarını, toplu özelliklerini, ve bir fazdan bir başka faza geçiş mekanizmalarını tanımlamayı ve sınıflandırmayı öğrenmek.
- **Araçlar:** Klasik alan kuramı yöntemleri; simetrilerin kullanımı, doğrusal olmayan durumları tedirgeme kuramı ile ele alma, ve renormalizasyon gurup (RG) metodu
- **Kapsam:** Malzeme ile yeterli aşinalığı sağlamak, böylece, faz geçişleri, büyüme olayı, polimerler, süperiletkenler vb. konulardaki güncel literatürü takip edebilirsiniz.

I.B Fononlar ve Esneklik

Esneklik kuramı, bir alan kuramının en basit örneklerindedir. Esnek bir ortamın belirli özelliklerinin, ya ilk prensiplerden başlayarak karmaşık yöntemle, ya da çok daha basit olan problemin simetrilerini kullanarak nasıl elde edebileceğimizi göstereceğiz. Bu yönden, olgusal yaklaşımlarla ne kadar öğrenebileceğimizin bir prototididir. Gerçek örneğin, bu derste işleyeceğim konularla pek fazla ilgisi yoktur, ancak, kullanılacak metodolojiyi tamamen gösterir. Bir katının, düşük sıcaklık ısı sığasının hesaplanması problemi, hem temel (*ab initio*) hem de olgusal yöntemlerle incelenebilir.

(i) Temel (parçacık) yaklaşımı: Bir katı maddenin ısı sığasının temel ilkelerden hesaplanması gayet karışıktır. Bazı adımları kısaca tarif edeceğiz:

- Temel başlangıç, yoğunluk fonksiyoneli formülasyonu (misal) ile yaklaşık olarak ele alınabilen, elektron ve iyonlar için Schrödinger denklemdir. Onun yerine biz, kendisi de kuantum mekaniksel bir inceleme sonucu elde edilmiş olabilen, *iyonik* koordinatlar için bir çok parçacık potansiyeli ile başlayacağız, $\mathcal{V}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_N)$.
- Sıfır sıcaklıktaki ideal ağ konumları, \mathcal{V} 'nin minimumu ile bulunur, ve tipik olarak $\vec{q}^*(l, m, n) = [l\hat{a} + m\hat{b} + n\hat{c}] \equiv \vec{q}_r^*$ ağını oluşturular, burada $\vec{r} = \{l, m, n\}$ tam sayılardan oluşan bir üçlü ve \hat{a} , \hat{b} , ve \hat{c} birim vektörlerdir.
- İdeal konumlar etrafındaki (sonlu sıcaklık veya kuantum etkilerden kaynaklı) küçük salınımlar

$\vec{q}_{\vec{r}} = \vec{q}_{\vec{r}}^* + \vec{u}(\vec{r})$ olarak alınarak dahil edilir. Potansiyel enerjideki deformasyonların bedeli:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^* + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\vec{r}, \vec{r}' \\ \alpha, \beta}} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_{\vec{r}, \alpha} \partial q_{\vec{r}', \beta}} u_{\alpha}(\vec{r}) u_{\beta}(\vec{r}') + O(u^3) \quad (1.1)$$

ile ifade edilir, burada α ve β uzamsal bileşenleri temsil eder. (\mathcal{V} 'nin denge konumlarındaki birinci türevinin sıfır olduğuna dikkat edin.) Küçük deformasyonlar için tam Hamiltoniyen, denklemler I.1'e, $\sum_{\vec{r}, \alpha} p_{\alpha}(\vec{r})^2 / 2m$, $p_{\alpha}(r)$, $u_{\alpha}(\vec{r})$ 'a eşlenik momentum olmak üzere, kinetik enerji ifadesi eklenerek elde edilir.

• Bir sonraki adım, türev matrisini köşegenleştirerek, salınımların normal modlarını (fononları) bulmaktır. Temel durum dizilimleri düzgün bir ağ oluşturduğu için, bu matrisin elemanları da çeşitli öteleme ve döndürme simetrilerini sağlamalıdır. Örnek olarak, sadece iyonların konum vektörlerinin, \vec{r} ve \vec{r}' farklarına bağlı olabilirler:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_{\vec{r}, \alpha} \partial q_{\vec{r}', \beta}} = K_{\alpha\beta}(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.2)$$

Bu öteleme simetrisi, Fourier modlarının kullanarak, Hamiltoniyen'i kısmen köşegenleştirmemize olanak verir:

$$u_{\alpha}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{N}} u_{\alpha}(\vec{k}) \quad (1.3)$$

(Toplamaya sadece ilk Brillouin bölgesindeki dalga vektörleri katkı verir). Böylece, Hamiltoniyen

$$\mathcal{H} = \mathcal{V}^* + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \alpha, \beta} \left[\frac{|p_{\alpha}(\vec{k})|^2}{m} + K_{\alpha\beta}(\vec{k}) u_{\alpha}(\vec{k}) u_{\beta}(\vec{k})^* \right] \quad (1.4)$$

Fourier dönüştürülmüş $K_{\alpha\beta}(\vec{k})$ matrisinin tam ifadesi mikroskopik etkileşimlerle belirlendiği halde, temelindeki kristalografik nokta grubunun simetrilerine uymak zorundadır. Bu 3×3 matrisin köşegenleştirilmesinin, $\kappa_{\alpha}(k)$ öz değerlerini verdiğini varsayalım. Bu durumda, Hamiltoniyen'in kareli kısmı, bir gurup bağımsız (etkileşmeyen) harmonik salınımlara ayrışır.

• Son adım, her bir salınıcıyı kuantumlamaktır, bunun sonucunda

$$\mathcal{H} = \mathcal{V}^* + \sum_{\vec{k}, \alpha} \hbar \omega_{\alpha}(\vec{k}) \left(n_{\alpha}(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right) \quad (1.5)$$

olur, burada $\omega_{\alpha}(\vec{k}) = \sqrt{\kappa_{\alpha}(\vec{k})/m}$ ve $\{n_{\alpha}(\vec{k})\}$ doldurma sayısı kümesidir. T sıcaklığındaki ortalama enerji

$$E(T) = \mathcal{V}^* + \sum_{\vec{k}, \alpha} \hbar \omega_{\alpha}(\vec{k}) \left(\langle n_{\alpha}(\vec{k}) \rangle + \frac{1}{2} \right) \quad (1.6)$$

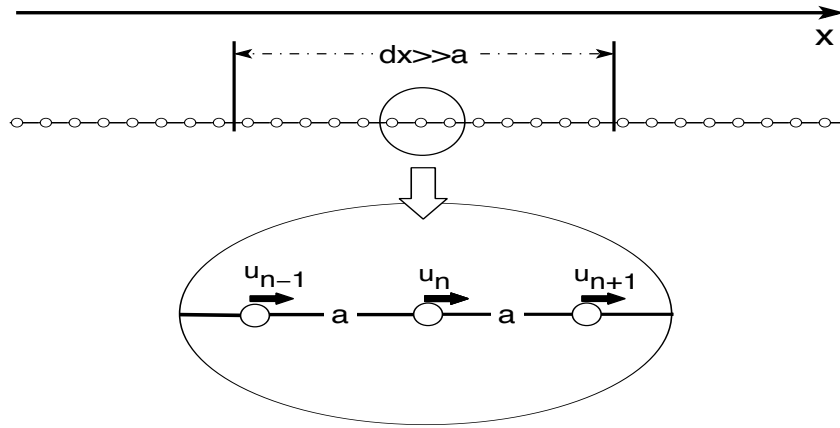


Figure I.1: Tek boyutlu bir zincirin kaymaları, ve kabalaştırma

ifadesi ile verilir, burada temel istatistiksel mekanikten bildiğimiz üzere doldurma sayıları $\langle n_{\alpha}(\vec{k}) \rangle = 1 / \left(\exp\left(\frac{\hbar\omega_{\alpha}}{k_B T}\right) - 1 \right)$ olarak verilir. Açıkça $E(T)$ 'nin, ve diğer makroskopik fonksiyonların, $\kappa_{\alpha}(k)$ 'dan dolayı mikroskopik detaylara bağlı karmaşık bir davranışı vardır. Bu fonksiyonların mikroskopik detaylardan bağımsız (örn. $T \rightarrow 0$ durumundaki fonksiyonel bağıllığı) özellikleri var mıdır? Cevap olumludur, ve tek boyutlu bir örnekle gösterilmiştir. Tek boyutta hareket edecek şekilde sınırlandırılmış, parçacıklardan oluşmuş bir zincir düşünün. Ortalama a aralıklarından u_n bozulmaları için en genel kareli potansiyel enerji:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^* + \frac{K_1}{2} \sum_n (u_{n+1} - u_n)^2 + \frac{K_2}{2} \sum_n (u_{n+2} - u_n)^2 + \dots \quad (1.7)$$

olarak yazılabilir. Normal modlar cinsinden ayırma

$$u_n = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikna} u(k), \text{ burada } u(k) = a \sum_n e^{ikna} u_n \quad (1.8)$$

yazarak elde edilir. (Denklemler I.3'deki normalleştirmeden farka dikkat ediniz.) Elde edilen potansiyel enerji

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^* + \frac{K_1}{2} \sum_n \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} (e^{ika} - 1)(e^{ik'a} - 1) e^{-i(k+k')na} u(k)u(k') + \dots \quad (1.9)$$

olur. $\sum_n e^{-i(k+k')na} = \delta(k+k')2\pi/a$ eşitliğini kullanır ve $u(-k) = u^*(k)$ olduğuna dikkat edersek:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^* + \frac{1}{2a} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk}{2\pi} [K_1(2 - 2 \cos ka) + K_2(2 - 2 \cos 2ka) + \dots] |u(k)|^2 \quad (1.10)$$

elde ederiz. Normal modların, $\omega(k) = \sqrt{[2K_1(1 - \cos ka) + \dots]/m}$ olarak verilen frekansları aşağıda gösterilmiştir. $k \rightarrow 0$ limitinde, $\omega(k) \rightarrow v|k|$, burada 'sesin hızı' v , $a\sqrt{K/m}$ 'e eşittir(aşağıya bakınız).

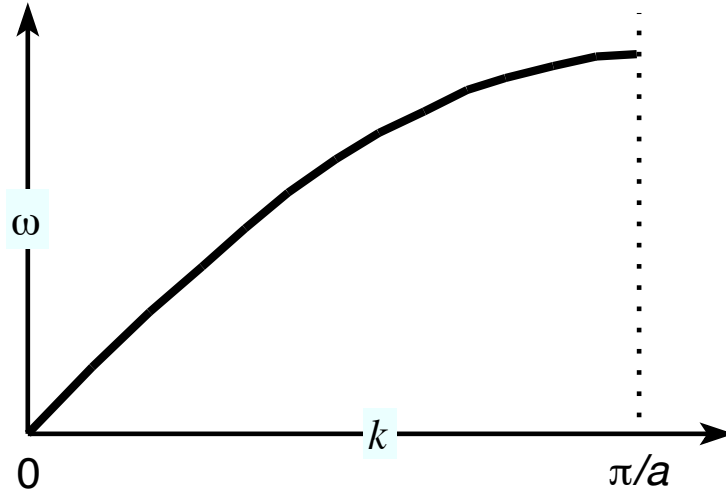


Figure I.2: Doğrusal bir zincirdeki fonon modlarının dağılımı

Bu uyarımların iç enerjisi, N parçacıktan oluşan bir zincir için:

$$E(T) = \mathcal{V}^* + Na \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk}{2\pi} \frac{\hbar\omega(k)}{\exp(\hbar\omega(k)/k_B T) - 1} \quad (I.11)$$

olarak verilir.

$T \rightarrow 0$ iken, sadece $\hbar\omega(k) < k_B T$ olan modlar uyarılır. Dolayısıyla, uyarılma dağılımının sadece $k \rightarrow 0$ olan kısmı önemlidir ve $E(T)$

$$E(T) = \mathcal{V}^* + Na \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\hbar v|k|}{\exp(\hbar v|k|/k_B T) - 1} = \mathcal{V}^* + Na \frac{\pi^2}{6\hbar v} (k_B T)^2 \quad (I.12)$$

olarak sadeleşir.

Not:

(1) Uyarılma enerjilerinin tam dağılımı

$$\frac{K(k)}{2} = K_1(1 - \cos ka) + K_2(1 - \cos 2ka) + \dots \implies \frac{\bar{K}}{2} k^2, \quad k \rightarrow 0 \text{ iken} \quad (I.13)$$

Uzak komşu etkileşimleri sesin hızını değiştirir, ancak $k \rightarrow 0$ durumundaki dağılım bağıntısının şeklini değiştirmez.

(2) Isı sıçması $C(T) = dE/dT$, T ile orantılıdır. Bu bağımlılık *evrensel* bir özelliktir, yani malzemeye özel değildir, ve atomarası etkileşimlerden bağımsızdır.

(3) Enerjinin T^2 bağımlılığı, $k \rightarrow 0$ (veya $\lambda \rightarrow 0$) olan uyarımlardan, yani pek çok parçacık

içeren toplu modlardan, kaynaklanır. Bunlar tam olarak da istatistiksel yaklaşımların anlamlı olduğu modlardır.

(ii) Fenomenolojik (alan) yaklaşımı: Şimdi, aynı probleme mezoskopik bir yaklaşımın ana hatlarından bahsedeceğiz, ve nasıl ilave anlayış sunduğunu ve daha yüksek boyutlara basitçe genelleştirilebileceğini göstereceğiz. Düşük sıcaklıklardaki tipik uyarımlar $\lambda > \lambda(T) \approx (\hbar v/kT) \gg a$, a ağ aralığı olmak üzere, olan dalgaboylarına sahiptirler. Önemsiz, kısa dalgaboylu modları *kabalaştırma* olarak bilinen bir işlemle ortadan kaldırmamız mümkündür. Fikir, herhangi bir nokta x ve $a \ll dx \ll \lambda(T)$ olacak şekilde etrafında bir aralık düşünün (Fig 1.1). dx 'in içinde tüm kaymalar yaklaşık olarak aynıdır; ve ortalama bir bozulma alanı $u(x)$ tanımlayabiliriz. Kinetik enerji, $\rho = m/a$ yoğunluğuna $\rho \int dx \dot{u}(x)^2/2$ ile bağlıdır. $u(x)$ 'in sürekli bir fonksiyon olarak muamele edildiğine dikkat edin, ancak ağ aralığı a 'dan daha küçük mesafelerde kesinlikle bir değişimi yoktur.

Zincir için en genel potansiyel enerji fonksiyoneli $\mathcal{V}[u]$ nedir? Önsel olarak, $\mathcal{V}[u]$ 'nin şekliyle ilgili çok bilgimiz yok, ancak aşağıdaki genel prensipleri kullanarak, onu oluşturabiliriz:

Yerellik: Çoğu durumda, parçacıklar arası etkileşimler kısa erimlidir, her noktadaki potansiyel enerji *yoğunluğu* Φ 'yi $\mathcal{V}[u] = \int dx \Phi(u(x), du/dx, \dots)$ olacak şekilde tanımlamamıza olanak verir. Doğal olarak, bütün türevleri dahil ederek, uzun erimli etkileşimleri de tanımlayabiliriz. Bu bağlamda, *yerellik*, yüksek türevlerin daha az önemli olduğu anlamına gelir.

Öteleme Simetrisi: Zincirin tamamının aynı şekilde ötelenmesi, iç enerjisini değiştirmez, dolayısıyla, enerji yoğunluğu $\Phi[u(x) + c] = \Phi[u(x)]$ şartını sağlamalıdır. Bu, Φ 'nin doğrudan $u(x)$ 'e bağlı olamayacağı, ancak sadece türevlerine du/dx , d^2u/dx^2 , \dots bağlı olabileceği anlamına gelir.

Kararlılık: Salınımlar *denge* çözümünü etrafında olduğu için, u ve türevleri doğrusal olarak olmazlar. (Kararlılık ayrıca, $\mathcal{V}[u]$ 'nin kareli kısmının kesin pozitif olmasını gerektirir.)

Bu koşullarla tutarlı en genel potansiyel

$$\mathcal{V}[u] = \int dx \left[\frac{K}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{L}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \dots + M \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 + \dots \right] \quad (1.14)$$

olur. Fourier dönüşümünden sonra

$$\mathcal{V}[u] = \int \frac{dk}{2\pi} \left[\frac{K}{2} k^2 + \frac{L}{2} k^4 + \dots \right] |u(k)|^2 - iM \int \frac{dk_1}{2\pi} \frac{dk_2}{2\pi} k_1 k_2 (k_1 + k_2) u(k_1) u(k_2) u(-k_1 - k_2) + \dots \quad (1.15)$$

halini alır. $k \rightarrow 0$ iken, yüksek dereceli gradyan terimleri (L gibi) önemsizleşir. Ayrıca, küçük bozulmalar için, u 'nin ikinci derecesinden sonraki terimleri (M gibi) ihmal edebiliriz. Kinetik enerjiyi de ekleyerek, Hamiltoniyeni

$$\mathcal{H} = \frac{\rho}{2} \int dx \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]$$

olan basit, tek boyutlu bir alan teorisi elde ederiz. Bu, malzeme bağımlı ρ ve $v = \sqrt{K/\rho}$ sabitleri

olan tek boyutlu bir esnek (sicim) teorisidir. Fenomenolojik yaklaşım, bu parametrelerin ne olduğunu söyleyemese de, düşük enerjili uyarımların, $\omega = v|k|$ dağılım bağıntısını sağladığını gösterir.

Şimdi, bu esnek teoriyi, herhangi d boyuta genelleştirebiliriz: kesikli parçacık deformasyonları \vec{u}_n , kabalaştırılarak, sürekli bir deformasyon alanına dönüştürülür. *Eşyönlü* bir malzeme için, potansiyel enerji $\mathcal{V}[\vec{u}]$, dönmeler ve ötelemeler altında değişmez olmalıdır: $u_\alpha(\vec{x}) \mapsto R_{\alpha\beta}u_\beta(\vec{x}) + c_\alpha$, burada $R_{\alpha\beta}$ bir dönme matrisidir. Faydalı bir yerel nicelik simetrik *gerilim alanıdır*:

$$u_{\alpha\beta}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (I.16)$$

Bu alan kullanılarak en genel deformasyon Hamiltoniyeni

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha,\beta} \int d^d x \left[\frac{\rho}{2} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{2\mu}{2} u_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} + \frac{\lambda}{2} u_{\alpha\alpha} u_{\beta\beta} \right] \quad (I.17)$$

olarak yazılır. Esneklik sabitleri μ ve λ , *Lame sabitleri* olarak bilinir. Tekrarlanan indeksler üzerinden toplam, sonucun dönmeler altında değişmez olmasını garantiler. Bu dönme değişmezliği, Fourier bazında, $\vec{u}(\vec{k}) = \int d^d \vec{x} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \vec{u}(\vec{x})$, daha açıktır, çünkü Hamiltoniyen

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{\rho}{2} |\dot{\vec{u}}(\vec{k})|^2 + \frac{\mu}{2} k^2 |\vec{u}(\vec{k})|^2 + \frac{\mu + \lambda}{2} (\vec{k} \cdot \vec{u}(\vec{k}))^2 \right]^2 \quad (I.18)$$

açıkça sadece dönme değişmez $\vec{k} \cdot \vec{k}$, $\vec{u} \cdot \vec{u}$ ve $\vec{k} \cdot \vec{u}$ niceliklerini içerir. Hamiltoniyen'i ayrıca, iki tip ses moduna ayırabiliriz: hızları $v_b = \sqrt{(2\mu + \lambda)/\rho}$ ve $\vec{k} \parallel \vec{u}$ olan *boylamsal modlar*, ve hızı $v_e = \sqrt{\mu/\rho}$ ve $\vec{k} \perp \vec{u}$ olan *enine modlar*. İç enerji

$$E(t) = L^d \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{\hbar v_b k}{\exp(\hbar v_b k / k_B T) - 1} + \frac{(d-1)\hbar v_e k}{\exp(\hbar v_e k / k_B T) - 1} \right] \approx \mathcal{A}(v_b, v_e) L^d (k_B T)^{d+1} \quad (I.19)$$

olarak verilir. Öz ısı sığası, $T \rightarrow 0$ iken, $C \propto T^d$ olarak sıfır olur.

Not:

- Bütün malzeme bağımlı parametreler \mathcal{A} katsayısı içindedir, bununla beraber T ile ölçeklenme evrenselidir.
- Evrensel üstel, $\vec{k} \rightarrow 0$ olan (hidrodinamik) modlardan kaynaklanır. Yüksek frekanslı (kısa dalgaboyu) modlar sadece yüksek sıcaklıklarda etkili olurlar.
- Ölçeklenme üsteli, boyuta ve etkileşmenin erimine bağlıdır. (Uzun erimli Coulomb etkileşmeleri, farklı bir sonuç verir.)
- Kuvvet yasalarının deneysel gözlenmesi, fizikle ilgili bizi uyarır. Örnek olarak,

süperakışkan helyumda, $C \propto T^3$ gözlemi (İdeal Bose gazı için beklenen $C \propto T^{3/2}$ yerine), hemen, Landau'nun dikkat çektiği gibi, fonon-benzeri uyarımları gerektiri.

* Kuvvet yasalarının evrenselliğini ve önemini gösteren pek çok iyi bilinen örnek vardır. Örnek olarak, belirtilmeyen bir ortamda hareket eden iz bırakıcılardan oluşan bir bulutu düşünün. Karakteristik bir x boyutunun t zamanı ile nasıl ölçeklendiği, parçacıkların hareketini belirleyen dinamikle ilgili bizi uyarır. Üç basit olasılık vardır:

(1) *Dağılıma*, bu durumda $x \propto \sqrt{Dt}$.

(2) *Kayıplı taşınım*, burada $x \propto vt$.

(3) *Serbest zorlanmış hareket*, burada, kütle çekimsel alanda olduğu gibi $x \propto gt^2/2$

Sıvı akışı için Navier-Stokes denklemi de bir başka örnektir. Bu örnekleri kullanarak, olgusal alan teorilerini oluşturmak ve incelemek için genel ilkeler oluşturabiliriz.

(1) Kaba Hamiltoniyen'i oluşturmak için **Girdi**, simetriler, etkileşmelerin erimi, ve boyuttan gelir.

(2) Yukarıdaki örnekten farklı olarak, genelde, doğrusal olmayan etkiler, elde edilen etkin alan teorisinde ihmal edilemez. Böyle doğrusal olmayan etkileri tedirgeme kuramı ve renormalizasyon grubu metodları ile nasıl ele alacağımızı öğreneceğiz.

(3) Analizin **Çıktıları**, doğrudan deneylerle kıyaslanabilen, evrensel üsteller, ve başka fonksiyonel bağımlılıklardır.