

MIT Açık Ders Malzemesi  
<http://ocw.mit.edu>

8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği  
2008 Bahar

Bu malzemeye atıfta bulunmak ve Kullanım Şartlarımızla ilgili bilgi almak için  
<http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://tuba.acikders.org.tr> sitelerini ziyaret ediniz.

## Tekrar Problemleri & Çözümleri

Test, ‘kapalı kitaptır,’ ancak isterseniz, tek-tarafli formül sayfası getirebilirsiniz. Bu sayfanın amacı, önemli formül ve denklemleri hatırlatmaktır, ve buradaki cevapların kısa yazımı değildir. Bu ayrıcalık kötüye kullanılırsa, ilerideki sınavlarda geri alınacaktır. Test, tamamen aşağıdaki soruların bir alt kümesinden oluşacaktır. Dolayısıyla bu sorularla yakınsanız ve rahatsanız, herhangi bir sürpriz olmayacak!

\*\*\*\*\*

**1: Sürekli Spinler:** Standart  $\mathcal{O}(n)$  modelinde,  $n$  bileşenli birim vektörler, bir ağın konumlarına yerleştirilirler. En yakın komşu spinler  $J\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$  bağı ile birbirine bağlanır. Aslında, biz sadece evrensel özellikleriyle ilgileniyorsak, herhangi bir genelleştirilmiş etkileşim  $f(\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j)$  aynı kritik davranışa yol açar. İsing modeline benzetmeyle, uygun bir tercih

$$\exp[f(\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j)] = 1 + (nt)\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$$

olur, ki *ilmek modeline* yol açar:

(a) İki boyutlu *altıgenel* (balpeteği) ağda, ( $Z$  bölüşüm fonksiyonu için)  $t$  parametresi cinsinden, yüksek sıcaklık açılımını yapın.

• İlmek modelinde bölüşüm fonksiyonu

$$Z = \int \{D\mathbf{s}_i\} \prod_{\langle ij \rangle} [1 + (nt)\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j]$$

şeklindedir, ve  $t$  parametresinin kuvvetleri şeklinde açılabilir. Eğer ağdaki en yakın komşu bağlarının toplam sayısı  $N_B$  ise, yukarıdaki çarpım  $2^{N_B}$  olası terim yaratır. Her terim, ağ üzerinde, eğer  $\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j$  terimi varsa,  $i$  ve  $j$  spinlerini birleştiren bir bağ içeren bir şekil ile gösterilebilir. Daha da ötesi, her dahil edilen bağ  $nt$  çarpanını taşır. İsing modelinde olduğu gibi,  $\{\mathbf{s}_i\}$  değişkenleri üzerinden integral almak, sadece her konumdan çift sayıda bağ çıkan grafikleri bırakır, çünkü

$$\int ds s_\alpha = \int ds s_\alpha s_\beta s_\gamma = \dots = 0.$$

Balpeteği ağında, aşağıda çizildiği gibi, her konumdan 1, 2, veya 3 bağ çıkar. Dolayısıyla, katkı veren şekiller sadece, her konumdan iki bağ çıkan grafiklerdir, ki her bir bağ bir kere olabileceği için, *kendinden uzak duran ilmeklerdir*.

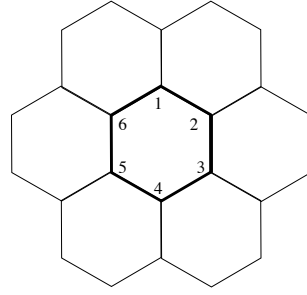
Balpeteği ağının, ilmeklerin bir konumda kesişmelerine izin vermeme avantajı olmakla beraber, evrensel sonuçlar diğer ağlara da uygulanabilir.

Spin üzerinden bütün integralleri  $n$ -boyutlu katı açı ile ölçekleyeceğiz, öyle ki  $\int ds = 1$  olsun.  $s_\alpha s_\alpha = 1$  olduğu için, hemen

$$\int ds s_\alpha s_\beta = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{n}$$

elde edilir ve

$$\int ds' (s_\alpha s'_\alpha) (s'_\beta s''_\beta) = \frac{1}{n} s_\alpha s''_\alpha$$



verir. Bu tarz integrallerin dizisi, bir ilmek çevresindeki spinlerin bileşenlerini aynı olmaya zorlar, ve ilmekteki son spin üzerinden integral alınca  $n$  çarpanı gelir, mesela

$$\int \{\mathcal{D}\mathbf{s}_i\} (s_{1\alpha} s_{2\alpha}) (s_{2\beta} s_{3\beta}) (s_{3\gamma} s_{4\gamma}) (s_{4\delta} s_{5\delta}) (s_{5\eta} s_{6\eta}) (s_{6\nu} s_{1\nu}) = \frac{\delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{\gamma\delta} \delta_{\delta\eta} \delta_{\eta\nu} \delta_{\alpha\nu}}{n^6} = \frac{n}{n^6}$$

Her bağ bir  $nt$  çarpanı taşıdığı için, sonuçta, her ilmek  $n \times t^\ell$  çarpanı katkısı verir, burada  $\ell$  ilmekteki bağların sayısıdır. Bundan sonra, bölüşüm fonksiyonu

$$Z = \sum_{\text{kendinden uzak duran ilmekler}} n^{N_\ell} t^{N_b}$$

olarak yazılabilir, ki burada toplam, bütün farklı, bağlantısız veya kendinden uzak duran ilmek topluluğu üzerindedir, bağ kaçarlığı  $t$ , ve  $N_\ell$ ,  $N_b$  sırasıyla grafikteki ilmeklerin ve bağların sayısıdır. Modelin sadece kritik davranışı ile ilgilendiğimiz için, genel analitik bir çarpan önemsizdir.

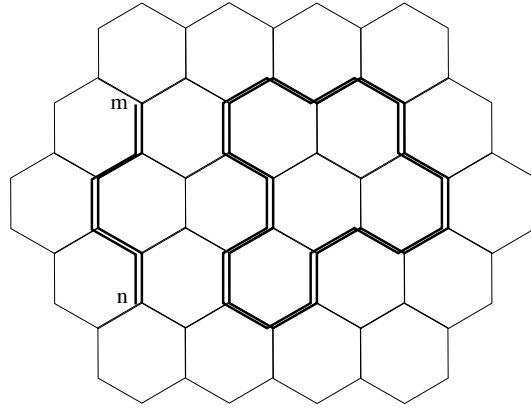
(b)  $n \rightarrow 0$  limitinin, ağ üzerinde, kendinden kaçan tek bir polimerin dizilimlerini tasvir ettiğini gösterin.

• Tam  $n = 0$ 'da  $Z = 1$  olurken,  $n \rightarrow 0$  limitine bakarak, ilginç bilgiler edinilebilir.  $n \rightarrow 0$  iken, önde gelen terim ( $\mathcal{O}(n^1)$ ), tek kendinden kaçan ilmekli dizilimleri seçer, yani  $N_\ell = 1$ .

Bağdaşıklık fonksiyonu da grafiksel olarak

$$G_{\alpha\beta}(n-m) = \langle s_{n\alpha} s_{m\beta} \rangle = \frac{1}{Z} \int \{\mathcal{D}\mathbf{s}_i\} s_{n\alpha} s_{m\beta} \prod_{\langle ij \rangle} [1 + (nt) \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j]$$

ifadesinden hesaplanabilir.



Herhangi bir genel çarpanı attıktan sonra, ve  $n \rightarrow 0$  limitinde, tek kalan grafik,  $n$ 'den  $m$ 'ye giden tek bir çizgidir, ve çizgi üzerindeki bütün spinler aynı olarak sabitlenmiştir. Bütün olası diğer grafikler,  $n \rightarrow 0$  limitinde yok olurlar. Dolayısıyla,  $n$ 'den  $m$ 'ye giden, herbiri  $t^\ell$  çarpanı taşıyan, burada  $\ell$  yürüyüşün uzunluğu olmak üzere, kendinden kaçan yürüyüşler üzerinden bir toplam kalır. Eğer, kendinden kaçan  $\ell$  uzunluğunda, ve ucundan ucuna uzaklığı  $R$  olan yürüyüşlerin sayısını  $W_\ell(R)$  ile gösterirsek,

$$\sum_{\ell} W_\ell(R) t^\ell = \lim_{n \rightarrow 0} G(R)$$

yazabiliriz.

Hayalet rastgele yürüyüşlerde olduğu gibi, küçük  $t$ 'lerde, bağdaşıklık fonksiyonunun davranışını küçük yollar belirler.  $t$  arttıkça, daha büyük yollar belirleyici olur, ve eninde sonunda belirli bir  $t_c$  değerinde, bir tekillik bulacağız, ki burada olabildiğince büyük yollar olası olur.

Kendinden kaçan yürüyüşlerin, arıpeteği ağı üzerindeki  $\mathcal{O}(n)$  modelinin  $n \rightarrow 0$  limitine eşlenmesini gösterdiğimiz halde, kritik davranışın evrensel olması ve dolayısıyla, ağ tercihinden bağımsız olması gerekir. Daha da fazlası, kendinden kaçan yürüyüşlerin çeşitli ölçeklenme özelliklerini  $\mathcal{O}(n)$  modelinin  $n \rightarrow 0$  limitinden çıkartabiliriz. Örnek olarak, kendinden kaçan yürüyüşlerin,

$$\langle R^2 \rangle = \frac{1}{W_\ell} \sum_R R^2 W_\ell(R)$$

burada  $W_\ell(R) = \sum_R W_\ell(R)$ ,  $\ell$  uzunluğundaki kendinden kaçan yolların sayısıdır, olarak tanımlanan bir ucundan diğer ucuna olan ortalama mesafesini karakterize edelim.

Bağdaşıklık fonksiyonunun tekil kısmı  $R$  aralığı ile,  $\xi \propto (t_c - t)^{-\nu}$  şeklinde iraksayan bağdaşıklık uzunluğuna kadar,  $G \propto |R|^{-(d-2+\eta)}$  olarak azalır. Dolayısıyla,

$$\sum_R R^2 G(R) \propto \xi^{d+2-(d-2+\eta)} = (t_c - t)^{-\nu(4-\eta)} = (t_c - t)^{-\gamma-2\nu}$$

Yukarıda  $G(t, R)$ 'nin,  $\sum_{\ell} W_\ell(R) t^\ell = G(t, R)$  anlamında,  $W_\ell(R)$ 'nin yaratan fonksiyonu olduğuna dikkat ettik. Benzer şekilde  $\sum_{\ell} W_\ell t^\ell$ ,  $W_\ell$ 'nin yaratan fonksiyonudur, ve  $\chi$  alinganlığına

$$\sum_{\ell} W_\ell t^\ell = \sum_R G(R) = \chi \propto (t_c - t)^{-\gamma}$$

olarak bağlıdır.  $W_\ell$ 'nin tekil davranışını, yaratıcı fonksiyonundan elde etmek için,  $(t_c - t)^{-\gamma}$  ifadesinin Taylor açılımını yaparız

$$\sum_{\ell} W_{\ell} t^{\ell} = t_c^{-\gamma} \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{-\gamma} = t_c^{-\gamma} \sum_{\ell} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\ell)\Gamma(1-\gamma-\ell)} \left(\frac{t}{t_c}\right)^{\ell}$$

ki

$$W_{\ell} = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\ell)\Gamma(1-\gamma-\ell)} t_c^{-\ell-\gamma}$$

elde ederiz.  $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \pi/\sin p\pi$  ifadesini kullanarak,  $\ell \rightarrow \infty$  limitine bakarak, ve gamma fonksiyonlarının asimptotik ifadesini kullanarak

$$W_{\ell} \propto \frac{\Gamma(\gamma+\ell)}{\Gamma(1+\ell)} t_c^{-\ell} \propto \ell^{\gamma-1} t_c^{-\ell}$$

elde ederiz, ve benzer şekilde,  $\sum_R R^2 W_{\ell}(R)$ 'yi de  $\sum_R R^2 G(R)$ 'den tahmin edebiliriz, ki

$$\langle R^2 \rangle \propto \frac{\ell^{2\nu+\gamma-1} t_c^{-\ell}}{\ell^{\gamma-1} t_c^{-\ell}} = \ell^{2\nu}$$

verir.  $\mathcal{O}(n)$  modelinin  $\epsilon$  açılımında  $n = 0$  alırsak, mesela,  $\nu = 1/2 + \epsilon/16 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  üstelini verir, ki kendinden kaçan  $\ell$  uzunluğundaki polimerin ortalama ucundan ucuna uzunluğunun karesinin ortalamasını karakterize eder,  $\nu_0 = 1/2$  yerine, ki bu hayalet rastgele yürüyüşlerin ölçeklenmesidir. Kendinden kaçmadan dolayı, (polimersel) yürüyüş şişerek daha büyük bir  $\nu$  verir.  $\epsilon = 1, 2$  ve  $3$  için,  $d = 3, 2$  ve  $1$ 'de sonuçlar  $0.56, 0.625$  ve  $0.69$ 'dur ve  $0.59, 3/4$ (tam), ve  $1$  (tam) değerleri ile kıyaslanmalıdır.

\*\*\*\*\*

**2: Potts model I:**  $-\beta\mathcal{H} = K \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{s_i, s_j}$  Hamiltoniyeni ile etkileşen Potts spinlerini  $s_i = (1, 2, \dots, q)$  düşünün.

(a) Bu problemi, yüksek sıcaklıklarda grafiksel olarak incelemek için, her bağ için Boltzmann ağırlığını

$$\exp(K\delta_{s_i, s_j}) = C(K) [1 + T(K)g(s_i, s_j)]$$

olarak yazın, burada  $g(s, s') = q\delta_{s, s'} - 1$ .  $C(K)$  ve  $T(K)$ 'yı bulun.

•  $C(K)$  ve  $T(K)$  iki bilinmeyenini belirlemek için,

$$\begin{cases} e^K = C [1 + T(q-1)] & s_i = s_j \text{ ise} \\ 1 = C [1 - T] & s_i \neq s_j \text{ ise} \end{cases}$$

ifadelerini kullanabiliriz, ki buradan

$$T(K) = \frac{e^K - 1}{e^K + q - 1}, \quad \text{ve} \quad C(K) = \frac{e^K + q - 1}{q}$$

elde ederiz.

(b)

$$\sum_{s=1}^q g(s, s') = 0, \quad \sum_{s=1}^q g(s_1, s)g(s, s_2) = qg(s_1, s_2), \quad \text{ve} \quad \sum_{s, s'=1}^q g(s, s')g(s', s) = q^2(q-1)$$

olduğunu gösterin.

• Dahası,

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^q g(s, s') &= q - 1 - (q - 1) = 0 \\ \sum_{s=1}^q g(s_1, s)g(s, s_2) &= \sum_{s=1}^q [q^2 \delta_{s_1 s} \delta_{s_2 s} - q(\delta_{s_1 s} + \delta_{s_2 s}) + 1] = q(q\delta_{s_1 s_2} - 1) = qg(s_1, s_2) \\ \sum_{s, s'=1}^q g(s, s')g(s, s') &= \sum_{s, s'=1}^q [q^2 \delta_{s s'} \delta_{s s'} - 2q\delta_{s s'} + 1] = q^3 - 2q^2 + q^2 = q^2(q - 1) \end{aligned}$$

olduğu kolayca kontrol edilebilir.

(c) Yukarıdaki sonuçları kullanarak, tek boyutlu bir zincir için, serbest enerjiyi ve bağıdaşıklık fonksiyonunu  $\langle g(s_m, s_n) \rangle$  hesaplayın.

•  $T(K)$  çarpanı, yüksek sıcaklık açılım parametremiz olacak. Her bağ  $Tg(s_i, s_j)$  çarpanı katkısı getirir, ve  $\sum_s g(s, s') = 0$  olduğu için, herhangi bir konum için sadece tek bir bağ olamaz. Derslerde bahsedilen İsing durumunda olduğu gibi, her bağ sadece bir defa olabilir, ve kalan grafiklerin sallanan bağları yoktur. Sonuç olarak, tek boyutlu bir zincir için, mesela açık sınır koşulları ile, kabul edilebilir bir grafik çizmek mümkün değildir, ve

$$Z = \sum_{\{s_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} C(K) [1 + T(K)g(s_i, s_j)] = C(K)^{N-1} q^N = q (e^K + q - 1)^{N-1}$$

Sınır etkilerini, yani zincirde  $N - 1$  bağ olmasını, ihmal ederek, konum başına serbest enerji

$$-\frac{\beta F}{N} = \ln (e^K + q - 1)$$

olarak elde edilir. Aynı yöntemle,  $\langle g(s_n s_m) \rangle$  bağıdaşıklık fonksiyonunu da hesaplayabiliriz. Sıfırdan farklı bir katkı elde etmek için, iki konumu doğrudan bağlayan grafiği düşünmemiz lazım.  $n > m$  olduğunu varsayarsak, bu

$$\begin{aligned} \langle g(s_n s_m) \rangle &= \frac{C(K)^N}{Z} = \sum_{\{s_i\}} g(s_n s_m) \prod_{\langle ij \rangle} [1 + T(K)g(s_i, s_j)] \\ &= \frac{C(K)^N}{Z} T(K)^{n-m} \sum_{\{s_i\}} g(s_n s_m) g(s_m, s_{m+1}) \cdots g(s_{n-1}, s_n) \\ &= \frac{C(K)^N}{Z} T(K)^{n-m} q^{n-m+1} (q-1) q^{N-(n-m)-1} = T^{n-m} (q-1) \end{aligned}$$

verir, burada (b)'deki ilişkileri kullandık.

(d) Kare ağ üzerindeki bölüşüm fonksiyonunu  $T^4$  mertebesine kadar hesaplayın. Bu problemin

düşük sıcaklık açılımındaki ilk terimi de hesaplayın.

• Kare ağ için, yüksek sıcaklık serisindeki ilk terim, 4 bağlı bir kareden gelir. Böyle  $N$  kare vardır. Dolayısıyla,

$$Z = \sum_{\{s_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} C(K) [1 + T(K)g(s_i, s_j)] = C(K)^{2N} q^N [1 + NT(K)^4(q-1) + \dots]$$

$\ell$  tane bağı olan, kesişmesi olmayan herhangi bir ilmeğin  $T^\ell q^\ell (q-1)$  katkısı vereceğine dikkat edin.

Diğer taraftan, düşük sıcaklıklarda, enerji, bütün spinlerin  $q$  olası değerlerinden birinde olduğu durumda en küçük değerini alır. En düşük enerjili uyarım, tek bir spinin farklı bir duruma geçmesidir, ve yozluk çarpanı  $N \times (q-1)$  ile enerji maliyeti  $K \times 4$ 'dür, ve

$$Z = qe^{2NK} [1 + N(q-1)e^{-4K} + \dots]$$

verir.

(e) Düşük sıcaklık ve yüksek sıcaklık serilerindeki ilk terimleri kıyaslayarak, Potts modeli için bir eşleklik kuralı bulun. Yüksek mertebeden diyagramları merak etmeyin, onlarda da çalışacak! Tek bir geçiş sıcaklığı olduğunu varsayarak,  $K_c(q)$ 'nin değerini bulun.

• Bu açılımları kıyaslayarak, Potts modeli için takip eden eşleklik koşulunu buluruz:

$$e^{-\tilde{K}} = T(K) = \frac{e^K - 1}{e^K + q - 1}$$

Bu eşleklik kuralı, düşük sıcaklık açılımını, yüksek sıcaklık serisine, veya tersi, eşitler. Ayrıca,  $\tilde{K} \Leftrightarrow K$  çiftlerini de birbirine eşler, çünkü, yukarıdaki bağıntıyı simetrik bir şekilde yazabiliriz

$$(e^{\tilde{K}} - 1)(e^K - 1) = q$$

ve dolayısıyla, tek bir tekil nokta  $K_c$  varsa, öz-eşlek bir nokta olmalı:

$$K_c = \tilde{K}_c, \quad \implies \quad K_c = \ln(\sqrt{q} + 1)$$

(f) Potts modeli için yüksek sıcaklık açılımındaki daha yüksek dereceden terimler, İsing modelinkilerden nasıl farklıdır.  $q = 2$  için grafikleri birbirinden ayıran temel fark nedir? (Bu, neden sadece İsing modelinin çözülebilir olduğunun esas sebebidir.)

• Derslerde bahsedildiği gibi,  $q = 2$  olan Potts modeli,  $\delta_{ss'} = (1 + ss')/2$  olduğunu kullanarak, İsing modeli ile eşlenebilir. Ancak, Potts modelinin, yüksek sıcaklık açılımındaki daha yüksek dereceden terimler, genel olarak, her konumdan  $\tilde{u}_\square$  veya daha fazla bağ çıkan grafikler içerir. Bu dizilimler, rastgele yürüyüşlere karşılık gelmez, kare ağdaki 2d-İsing modeli için tanımlanan sınırlanmış olanlara bile karşılık gelmez.

$$\sum_{s_1=1}^q g(s_1, s_2)g(s_1, s_3)g(s_1, s_4) = q^2 \delta_{s_2 s_3} \delta_{s_2 s_4} - q^2 (\delta_{s_2 s_3} + \delta_{s_2 s_4} + \delta_{s_3 s_4}) + 2q$$

niceliği,  $q = 2$ 'de her zaman sıfırdır. ( $s_2, s_3$  ve  $s_4$  spinlerinin herhangi bir olası durumu için kontrol edilebilir), ama  $q > 2$  için, genel olarak sıfırdan farklıdır. Bu,  $q = 2$  durumunu ayıran temel farktır.

\*\*\*\*\*

### 3. Potts modeli II: Alternatif bir açılım

$$\exp [K\delta(s_i, s_j)] = 1 + v(K)\delta(s_i, s_j)$$

açılımından başlanarak elde edilir, burada  $v(K) = e^K - 1$ . Bu durumda, spinler üzerinden toplam, herhangi bir diyagramı götürmez, ve hertürlü bağları ağ üzerinde rastgele dağıtma tercihi kabul edilebilir.

(a)  $h = \sum_i \delta_{s_i,1}$  manyetik alanını dahil ederek, bölüşüm fonksiyonunun

$$Z(q, K, h) = \sum_{\text{bütün diyagramlar}} \sum_{\text{diyagramdaki bütün } c \text{ kümeleri}} \left[ v^{n_b^c} \times (q - 1 + e^{hn_s^c}) \right]$$

şeklini aldığını gösterin, burada  $n_b^c$  ve  $n_s^c$ ,  $c$  kümesindeki bağ ve konumların sayısıdır. Bu *rastgele küme açılımı* olarak bilinir.

• 1 doğrultusunda, simetriyi kıran bir alan dahil edersek, bölüşüm fonksiyonu

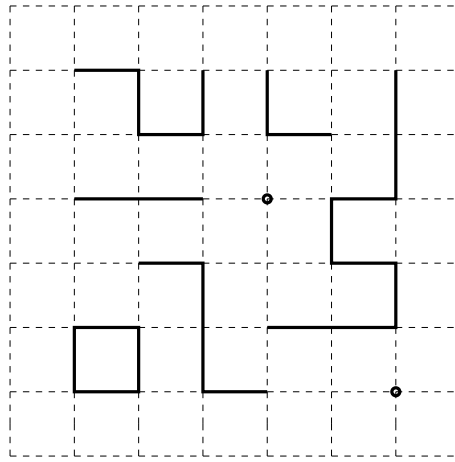
$$Z = \sum_{\{s_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} [1 + v(K)\delta(s_i, s_j)] \prod_i e^{h\delta_{s_i,1}}$$

$v(K)$ 'nın kuvvetleri şeklinde aşağıdaki şekilde açılabilir. Herzamanki gibi, ağda,  $N_B$  tane en yakın komşu bağı vardır, bağlar üzerinden çarpım  $2^{N_B}$  tane terim yaratır. Her terim, ağ üzerinde, eğer incelenen terimde  $v\delta(s_i, s_j)$  terimi varsa,  $i$  ve  $j$  konumlarını bağlayan bir bağ çizilerek, bir grafikte gösterilebilir. Dahil edilen her bağ,  $v(K)$  çarpanı ile bağladığı spinleri eşitleyen bir delta fonksiyonu taşır. Genel olarak bu bağlar, farklı boyut ve şekillerde kümeler oluşturur, ve her kümede, delta fonksiyonları, her köşedeki spinlerin eşit olmasını sağlar. Dolayısıyla,  $\sum_{\{s_i\}}$  toplamı, her küme için,  $(q - 1) + e^{hn_s^c}$  çarpanı getirir, burada  $n_s^c$  kümedeki noktaların sayısıdır. Bu durumda, bölüşüm fonksiyonu

$$Z(q, v, h) = \sum_{\text{bütün grafikler}} \prod_{\text{grafikteki kümeler}} \left[ v(K)^{n_b^c} (q - 1 + e^{hn_s^c}) \right]$$

olarak yazılabilir, burada  $n_b^c$ ,  $c$  kümesindeki bağların sayısıdır, ve toplam bütün farklı küme toplulukları üzerindedir. Tek başına bir konum da, bu küme tanımına dahildir. İlk Potts modeli, tam sayı  $q$  için tanımlanmış olsa da, bu açılımı kullanarak,  $Z$ 'yi bütün  $q$  değerleri için hesaplayabiliriz.





(b)  $q \rightarrow 1$  limitinin *süzülme* problemine, ki bu problemde bağlar ağ üzerine  $p = v(v+1)$  olasılığı ile rastgele dağıtılır, denk olduğunu gösterin. Kare ağda, süzülme eşiği nedir?

• *Bağ süzülmesi* probleminde, bağlar, ağda bulunma olasılıkları  $p$  olacak şekilde, bağımsız olarak dağılmışlardır. Dolayısıyla, boş ve işgal edilmiş bağlardan oluşan verilen bir dizilimin ağırlığı

$$W(\text{grafik}) = (1-p)^{zN} \prod_{\text{grafikteki kümeler}} \left( \frac{p}{1-p} \right)^{n_b^c}$$

olarak verilir.  $(1-p)^{zN}$  ön çarpanı, hiç bağ içermeyen dizilimin ağırlığıdır. Yukarıdaki ağırlıklar,  $q = 1$  (ve  $h = 0$ ) için, açıkça Potts modelinin rastgele küme açılımındakiyle özdeş olur. Açıkça,  $p = v/(v+1)$  almak, ve  $(1+v)^N$  genel çarpanını, ki  $v$ 'de analittir ve herhangi bir tekil özelliği etkilemez, ihmal etmek zorundayız. Bu limitteki bölüşüm fonksiyonunun kendisi  $Z(1, v, h) = (1+v)^{zN} e^{hN}$  olduğu için ilginç değildir. Diğer taraftan, kümelerin sayısı ile ilgili bilgiye,  $q \rightarrow 1$  limitinde,

$$\left. \frac{\partial \ln Z(q, v)}{\partial q} \right|_{q=1} = \sum_{\text{bütün grafikler}} [\text{grafiğin olasılığı}] \sum_{\text{grafikteki kümeler}} e^{-hn_c^2}$$

ifadesinin  $q \rightarrow 1$  limitinden ulaşılabılır.

Süzülme ile ilgili çeşitli ilginç özellikler, yukarıdaki yaratma fonksiyonundan hesaplanabilir. Bu eşleştirme, süzülme noktasındaki, ki sürekli bir geometrik faz geçişidir, ölçeklenme yasalarını çıkarmamıza olanak sağlar. Kritik sıcaklığın benzerini, süzülme eşiği,  $p_c$ , oynar, ki eşleliği kullanarak  $p_c = 1/2$  olarak hesaplanabilir ( $v^* = 1$  olduğuna dikkat ettikten sonra).

Bu eşiği elde etmenin alternatif bir yöntemi, süzülme probleminin kendisi için eşleklik kuralı bulmaktır: Problemi, benzer şekilde boş bağlar cinsinden, ve karşılık gelen  $q$  olasılıkları ile, düşünebiliriz.  $p$ , sıcaklık rolünü oynadığı için, düşük  $p$ 'yi, yüksek  $q$ 'ye ve tersine eşlemek mümkündür, öyle ki  $q = 1 - p$ . O zaman, öz-eşlek nokta  $p^* = 1 - p^*$  olarak elde edilebilir, ki burada  $p^* = 1/2$  elde edilir.

(c)  $q \rightarrow 0$  limitinde, ilk derecede, sadece tek bir bağlantılı kümenin katkı verdiğini gösterin. Bütün böyle kümelerin numaralanması *dallanmış ağ hayvanlarının* listelenmesi olarak bilinir.

•  $q = 0$ 'da  $Z(q, v, h)$  bölüşüm fonksiyonu sıfıra gider, ancak, yeniden, ağın geometrik yapısı

hakkındaki bilgi,  $q \rightarrow 0$  limitini uygun bir şekilde alarak elde edilebilir. Özellikle,  $v = q^a x$  alırsak,

$$Z(q, v = xq^a, h = 0) = \sum_{\text{bütün grafikler}} x^{N_b} q^{N_c + aN_b}$$

olur, burada  $N_b$  ve  $N_c$  toplam bağ ve küme sayısıdır.  $q \rightarrow 0$  iken önde gelen  $q$  bağımlılığı, en küçük  $N_c + aN_b$  sayısına sahip grafiklerden gelir, ve  $a$ 'nın değerine bağlıdır.  $0 < a < 1$  için, bunlar, ağın bütün konumlarını birbirine bağlayan (dolayısıyla  $N_c = 1$ ) ve hiç bir ilmek içermeyen (dolayısıyla  $N_b = N - 1$ ), kapsayan ağaçlardır. Böyle kapsayan ağaçların  $x^{a(N-1)} q^{aN-a+1}$  kuvveti vardır, ve bütün diğer grafiklerin daha yüksek  $q$  kuvvetleri vardır.  $a = 0$  için, kuvvetini değiştirmeden, kapsayan ağaçlara, bütün konumlar bir tek kümeye bağlı kaldığı sürece, bağlar eklenebilir (ilmekler yaratarak). Bunların, *dallanmış ağ hayvanları* diye bilinen problemle ilgisi vardır.

\*\*\*\*\*

**4. Potts eşlekligi:**  $N$  konumlu kare bir ağa yerleştirilmiş Potts spinlerini düşünün,  $s_i = (1, 2, \dots, q)$ , öyle ki en yakın komşularıyla

$$-\beta\mathcal{H} = K \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{s_i, s_j}$$

Hamiltoniyeniyle etkileşsinler.

(a) Yüksek ve düşük sıcaklık serilerindeki ilk birkaç terimi kıyaslayarak, veya başka herhangi bir yöntemle, bölüşüm fonksiyonunun, bir  $\Xi$  fonksiyonu için

$$Z(K) = qe^{2NK} \Xi [e^{-K}] = q^{-N} [e^K + q - 1]^{2N} \Xi \left[ \frac{e^K - 1}{e^K + (q - 1)} \right]$$

özelliğinin olduğunu gösterin, ve buradan  $K_c(q)$  kritik noktasını bulun.

• Düşük sıcaklık açılımı

$$Z = qe^{2NK} [1 + N(q-1)e^{-4K} + \dots] \equiv qe^{2NK} \Xi [e^{-K}]$$

halini alırken, yüksek sıcaklık açılımı

$$\begin{aligned} Z &= \left[ \frac{e^K + q - 1}{q} \right]^{2N} q^N \left[ 1 + N(q-1) \left( \frac{e^K - 1}{e^K + q - 1} \right)^4 + \dots \right] \\ &\equiv q^{-N} [e^K + q - 1]^{2N} \Xi \left[ \frac{e^K - 1}{e^K + q - 1} \right] \end{aligned}$$

halini alır.

$\Xi$  için yukarıdaki serilerin ikisi de aslında aynıdır, ve

$$e^{-\tilde{K}} = \frac{e^K - 1}{e^K + q - 1}$$

eşleklilik sonucunu, ve kritik (öz-eşlek) noktasını

$$K_c = \tilde{K}_c, \quad \implies \quad K_c = \ln(\sqrt{q} + 1)$$

olarak verir.

(b)  $Z(K)$  için eşleklilik ifadesinden, iç enerji  $U(K) = \langle \beta \mathcal{H} \rangle = -\partial \ln Z / \partial \ln K$  için benzer bir ilişki çıkarın. Bu sonucu kullanarak,  $U$ 'nun kritik noktadaki tam değerini hesaplayın.

• Bölüşüm fonksiyonu için eşleklilik bağıntısı

$$\ln Z(K) = \ln q + 2NK + \ln \Xi [e^{-K}] = -N \ln q + 2N \ln [e^K + q - 1] + \ln \Xi \left[ \frac{e^K - 1}{e^K + q - 1} \right]$$

verir. Bundan sonra, iç enerji

$$\begin{aligned} -\frac{U(K)}{K} &= \frac{\partial}{\partial K} \ln Z(K) = 2N - e^{-K} \ln \Xi' [e^{-K}] \\ &= 2N \frac{e^K}{e^K + q - 1} + \frac{qe^K}{(e^K + q - 1)^2} \ln \Xi' \left[ \frac{e^K - 1}{e^K + q - 1} \right] \end{aligned}$$

ifadesinden elde edilir.  $\ln \Xi'$ ,  $\ln \Xi$ 'in argümanına göre türevidir, ki genel olarak değeri bilinmezdir. Ancak,  $K_c$  kritik noktasında, yukarıdaki ifadenin  $\ln \Xi'$  yüksek ve düşük sıcaklıktaki ifadeleri aynıdır.  $e^{K_c} = 1 + \sqrt{q}$  yerleştirerek,

$$2N - \frac{\ln \Xi'_c}{1 + \sqrt{q}} = \frac{2N}{\sqrt{q}} + \frac{\ln \Xi'_c}{1 + \sqrt{q}}, \quad \implies \quad \ln \Xi'_c = \frac{q - 1}{\sqrt{q}} N$$

ve

$$-\frac{U(K_c)}{K_c} = N \left( 2 - \frac{q - 1}{\sqrt{q} + q} \right), \quad \implies \quad U(K_c) = NK_c \frac{\sqrt{q} + 1}{\sqrt{q}}$$

elde ederiz.

\*\*\*\*\*

**5. Eşyönsüz Rastgele Yürümler:** Kare ağ üzerinde,  $(0, 0)$  orijin noktasından başlayan bütün rastgele yürüyüş topluluğunu düşünün. Her yürüyüşün ağırlığı  $t_x^{\ell_x} \times t_y^{\ell_y}$  olur, burada  $\ell_x$  ve  $\ell_y$ , sırasıyla,  $x$  ve  $y$  yönündeki adımların sayısıdır.

(a)  $(x, y)$ 'de biten bütün yürüyüşlerin toplam ağırlığını  $W(x, y)$  hesaplayın.  $W$ 'nın sadece  $\bar{t} = (t_x + t_y)/2 < t_c = 1/4$  için iyi tanımlı olduğunu gösterin.

•  $\langle 0, 0 | W(\ell) | x, y \rangle$ 'yi  $(x, y)$ 'de biten,  $\ell$  adımlı yürüyüşlerin toplam ağırlığı olarak tanımlarsak, ders notlarının VI.F bölümündeki adımları takip edebiliriz. Eşyönsüz durumda, denklem (VI.47)'yi ( $\ell$  kere uygulanmış), kolayca

$$\begin{aligned} \langle x, y | T^\ell | q_x, q_y \rangle &= \sum_{x', y'} \langle x, y | T^\ell | x', y' \rangle \langle x', y' | q_x, q_y \rangle \\ &= (2t_x \cos q_x + 2t_y \cos q_y)^\ell \langle x, y | q_x, q_y \rangle \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz, burada  $\langle x, y | q_x, q_y \rangle = e^{iq_x x + iq_y y} / \sqrt{N}$ .  $W(x, y) = \sum_\ell \langle 0, 0 | W(\ell) | x, y \rangle$  olduğu

için, Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} W(q_x, q_y) &= \sum_{\ell} \sum_{x,y} \langle 0, 0 | T^{\ell} | x, y \rangle \langle x, y | q_x, q_y \rangle \\ &= \sum_{\ell} (2t_x \cos q_x + 2t_y \cos q_y)^{\ell} = \frac{1}{1 - (2t_x \cos q_x + 2t_y \cos q_y)} \end{aligned}$$

olarak kolayca hesaplanabilir. Son olarak, geriye Fourier dönüşümü yaparsak

$$W(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} W(q_x, q_y) e^{-iq_x x - iq_y y} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{e^{-iq_x x - iq_y y}}{1 - (2t_x \cos q_x + 2t_y \cos q_y)}$$

Serinin toplamı  $2t_x + 2t_y < 1$  olduğu sürece anlamlıdır (bütün  $q$ 'lar için), yani  $\bar{t} = (t_x + t_y)/2 < t_c = 1/4$  için.

(b) Büyük  $x$  ve  $y$  için, ve geçişe yakınken  $W(x, y) =$  sabit eğrilerinin şekli nedir?

• Büyük  $x$  ve  $y$  için, yukarıdaki integrale asıl katkı küçük  $q$ 'lardan gelir.  $q_x$  ve  $q_y$ 'de ikinci dereceye kadar, integrali alınan ifadenin paydası

$$1 - 2(t_x + t_y) + t_x q_x^2 + t_y q_y^2$$

olur. Bundan sonra,  $q'_i \equiv \sqrt{t} q_i$  tanımı ile,

$$W(x, y) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 q'}{(2\pi)^2 \sqrt{t_x t_y}} \frac{e^{-i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{v}}}{1 - 2(t_x + t_y) + \mathbf{q}'^2}$$

elde ederiz, burada integral sınırlarını sonsuza uzattık, ve  $\mathbf{v} = \left( \frac{x}{\sqrt{t_x}}, \frac{y}{\sqrt{t_y}} \right)$ . Payda dönmeler altında değişmez olduğundan, integral sadece  $v$  vektörünün genliğine bağlı olabilir. Bir başka deyişle,  $W(x, y)$ ,

$$\frac{x^2}{t_x} + \frac{y^2}{t_y} = \text{sabit}$$

elipsleri boyunca sabittir.

(c) Ortalama adım sayısı,  $\langle \ell \rangle = \langle \ell_x + \ell_y \rangle$ ,  $\bar{t} t_c$ 'ye yaklaşırken nasıl ıraksar?

•  $\ell$  uzunluğundaki bütün yürüyüşlerin ağırlığı, son noktalarından bağımsız olarak,

$$\sum_{x,y} \langle 0, 0 | W(\ell) | x, y \rangle = \langle 0, 0 | T^{\ell} | q_x = 0, q_y = 0 \rangle = (2t_x + 2t_y)^{\ell} = (4\bar{t})^{\ell}$$

olarak verilir. Bundan dolayı

$$\langle \ell \rangle = \frac{\sum_{\ell} \ell (4\bar{t})^{\ell}}{\sum_{\ell} (4\bar{t})^{\ell}} = 4\bar{t} \frac{\partial}{\partial (4\bar{t})} \ln \left[ \sum_{\ell} (4\bar{t})^{\ell} \right] = 4\bar{t} \frac{\partial}{\partial (4\bar{t})} \ln \frac{1}{1 - 4\bar{t}} = \frac{4\bar{t}}{1 - 4\bar{t}}$$

yani

$$\langle \ell \rangle = \frac{\bar{t}}{t_c - \bar{t}}$$

$\bar{t}$  tekil değeri civarında doğrusal olarak ıraksar.

\*\*\*\*\*

### 6. Eşyönsüz İsing Modeli: Kare ağ üzerinde, Hamiltoniyeni

$$-\beta\mathcal{H} = \sum_{x,y} (K_x \sigma_{x,y} \sigma_{x+1,y} + K_y \sigma_{x,y} \sigma_{x,y+1})$$

olan, yani  $x$  ve  $y$  yönlerindeki bağ kuvvetleri farklı olan, eşyönsüz İsing modelini düşünelim.

(a) Metinde tarif edilen yöntemi kullanarak, bu modelin serbest enerjisini hesaplayın. Çıkarımın her adımını yazmanız gerekmez. Sadece, eşyönsüzlükten dolayı değiştirilmesi gereken adımları gösterin; ve  $\ln Z/N$  için sonucu hesaplayın.

•

$$-\beta\mathcal{H} = \sum_{x,y} (K_x \sigma_{x,y} \sigma_{x+1,y} + K_y \sigma_{x,y} \sigma_{x,y+1})$$

Hamiltoniyeni

$$Z = \sum (2 \cosh K_x \cosh K_y)^N t_x^{\ell_x} t_y^{\ell_y}$$

ifadesine götürür, burada  $t_i = \tanh K_i$ , ve toplam bütün kapalı grafikler üzerindedir. Eşyönlü durumu genişleterek

$$f = \frac{\ln Z}{N} = \ln(2 \cosh K_x \cosh K_y) + \sum_{\ell_x, \ell_y} \frac{t_x^{\ell_x} t_y^{\ell_y}}{\ell_x + \ell_y} \langle 0 | W^*(\ell_x, \ell_y) | 0 \rangle$$

burada

$$\langle 0 | W^*(\ell_x, \ell_y) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum' (-1)^{\text{kesişmelerin sayısı}}$$

ve üslü toplam,  $(0,0)$ 'dan  $(0,0)$ 'a,  $U$  dönüşsüz, bütün yönlendirilmiş  $(\ell_x, \ell_y)$ -adımlı yürüyüşler üzerindedir. Eşyönlü durumda olduğu gibi, bu, denklem (VI.66)'da tanımlanan, ve Fourier dönüşümü ile blok köşegenleştirilebilen  $4N \times 4N$ 'lik matrisin kuvvetlerini alarak hesaplanır. Ancak, her elemanı  $t$  ile çarpılan, eşyönlü durumdan farklı olarak, burada sırasıyla  $t_x$  ve  $t_y$  ile çarpılır, ve

$$f = \ln(2 \cosh K_x \cosh K_y) + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \text{İz} \ln [1 - T(\mathbf{q})^*]$$

elde edilir, buradan

$$\begin{aligned} \text{İz} \ln [1 - T(\mathbf{q})^*] &= \ln \det [1 - T(\mathbf{q})^*] \\ &= \ln \left[ (1 + t_x^2)(1 + t_y^2) - 2t_x(1 - t_y^2) \cos q_x - 2t_y(1 - t_x^2) \cos q_y \right] \\ &= \ln \left[ \frac{\cosh 2K_x \cosh 2K_y - \sinh 2K_x \cos q_x - \sinh 2K_y \cos q_y}{\cosh^2 K_x \cosh^2 K_y} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ki

$$f = \ln 2 + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \ln(\cosh 2K_x \cosh 2K_y - \sinh 2K_x \cos q_x - \sinh 2K_y \cos q_y)$$

verir.

(b) Serbest enerjinin tekilliğinden, kritik sınırı  $(K_x, K_y)$  düzleminde bulun.  $K_x = \tilde{K}_y$  koşuluyla örtüşüğünü gösterin, burada  $\tilde{K}$ ,  $K$ 'ya standart eşlek etkileşimi gösterir.

- Logaritmanın argümanı  $q_x = q_y = 0$ 'da en küçük değerini alır, ve

$$\begin{aligned} & \cosh 2K_x \cosh 2K_y - \sinh 2K_x - \sinh 2K_y \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{K_x} \sqrt{\cosh 2K_y - 1} - e^{-K_x} \sqrt{\cosh 2K_y + 1} \right)^2 \end{aligned}$$

ifadesine eşittir. Dolayısıyla, kritik çizgi

$$e^{2K_x} = \sqrt{\frac{\cosh 2K_y + 1}{\cosh 2K_y - 1}} = \coth K_y$$

ile verilir. Bu koşulun

$$\sinh 2K_x = \frac{1}{2} (\coth K_y - \tanh K_y) = \frac{1}{\sinh 2K_y}$$

olarak yazılabileceğine dikkat edin, yani, kritik sınır  $K_x = \tilde{K}_y$  olarak tasvir edilebilir, burada eşlek etkileşimler  $\tilde{K}$  ve  $K$ ,  $\sinh 2K \sinh 2\tilde{K} = 1$  olarak ilişkilidir.

(c)  $\ln Z/N$ 'nin tekil kısmını bulun, ve eşyönsüzlüğün üstel ve genlik oranlarında kritik davranışı nasıl etkilediğini yorumlayın.

- Eşyönsüz durumda,  $\ln Z/N$ 'nin tekil kısmı

$$f_T = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \ln \left[ \left( e^{K_x} \sqrt{\cosh 2K_y - 1} - e^{-K_x} \sqrt{\cosh 2K_y + 1} \right)^2 + \sum_{i=x,y} \frac{q_i^2}{2} \sinh 2K_i \right]$$

olarak yazılabilir. Bu ifadeyi, eşyönlü durumdaki serbest enerjinin tekil kısmına benzer bir şekilde yeniden yazmak için,

$$q_i = \sqrt{\frac{2}{\sinh 2K_i}} q'_i$$

ve

$$\delta t = e^{K_x} \sqrt{\cosh 2K_y - 1} - e^{-K_x} \sqrt{\cosh 2K_y + 1}$$

alalım  $((K_x, K_y)$  kritik sınırı kesen bir eğri boyunca aktıkça doğrusal olarak sıfıra gider). Bundan sonra,

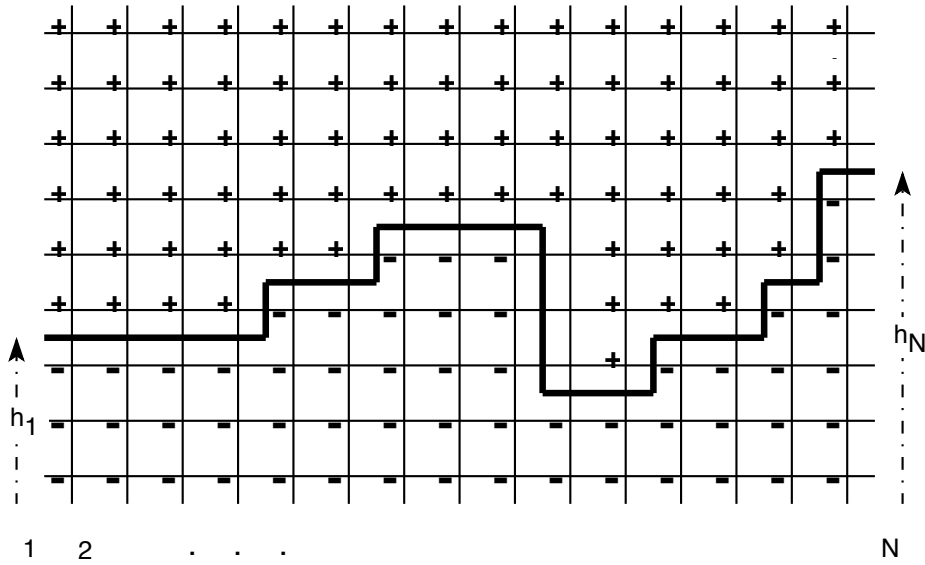
$$f_T = \frac{1}{\sqrt{\sinh 2K_x \sinh 2K_y}} \int \frac{d^2 q'}{(2\pi)^2} \ln(\delta t^2 + q'^2)$$

elde ederiz. Dolayısıyla, kritik sınıra yaklaştıkça ( $\sinh 2K_x \sinh 2K_y = 1$ ), eşyönsüz durumdaki serbest enerjinin tekil kısmı gittikçe daha çok eşyönlü duruma benzer, ve üsteller ve genlik oranları, eşyönsüzlükle değişmez. (Genliklerin kendisi tabi ki konuma bağlıdır)

\*\*\*\*\*

7.  $d = 2$  İsing modelinin arayüz enerjisinin *Müller-Hartmann Zittartz tahmini*:

(a) Kare ağda, bir yönde tekrarlanan sınır koşullu bir arayüz düşünün. Sarkıntıları ve adaları



ihmal edersek, dizilimler  $1 \leq n \leq L$  için,  $h_n$  yükseklikleri ile işaretlenebilir. Eşyönsüz  $(K_x, K_y)$  etkileşimleri olan İsing modeli için,  $x$  yönündeki bir arayüzün enerjisinin

$$-\beta\mathcal{H} = -2K_y L - 2K_x \sum_n |h_{n+1} - h_n|$$

olduğunu gösterin.

• Doyurulmamış her  $(+-)$  bağı için, enerji, temel durum enerjisine göre  $2K_i$  kadar artar,  $i = x$  eğer doyurulmamış bağ dik ise, ve  $i = y$  eğer yataysa. Sallananları ve adaları ihmal edersek, arayüzdeki yatay bağların sayısı  $L$  iken, dikey modların sayısı  $\sum_n |h_{n+1} - h_n|$  olur, ki

$$-\beta\mathcal{H} = -2K_y L - 2K_x \sum_{n=1}^L |h_{n+1} - h_n|$$

verir.

(b) Sütundan sütuna taşıma matrisini  $\langle h | T | h' \rangle$  yazın, ve köşegenleştirin.

•

$$\langle h | T | h' \rangle \equiv \exp(-2K_y - 2K_x |h' - h|)$$

olarak, veya matris şeklinde

$$T = e^{-2K_y} \begin{pmatrix} 1 & e^{-2K_x} & e^{-4K_x} & \dots & e^{-HK_x} & e^{-HK_x} & e^{-2(\frac{H}{2}-1)K_x} & \dots & e^{-2K_x} \\ e^{-2K_x} & 1 & e^{-2K_x} & \dots & e^{-2(\frac{H}{2}-1)K_x} & e^{-2(\frac{H}{2}+1)K_x} & e^{-HK_x} & \dots & e^{-4K_x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

tanımlayabiliriz, burada  $H$ , ağın dikine boyutudur.  $H \rightarrow \infty$  limitinde,  $T$  kolayca köşegenleştirilebilir, çünkü her satır, bir öncekinden sütunları tek kaydırarak elde edilebilir. Böyle bir matrisin özvektörleri, birin karmaşık köklerinden elde edilir (bu, öteleme simetrisi olan

bir sistemin, Fourier modlarında köşegenleşmiş olması durumuna denktir.).

$$\left( e^{i\frac{2\pi}{K}}, e^{i\frac{2\pi}{K} \cdot 2}, e^{i\frac{2\pi}{K} \cdot 3}, \dots, e^{i\frac{2\pi}{K} \cdot (H+1)} \right)$$

özvektörünün özdeğeri

$$\lambda_k = e^{-2K_y} \sum_{n=1}^{H+1} T_{1n} e^{i\frac{2\pi}{K} \cdot (n-1)}$$

olarak verilir.  $k = 1, \dots, H + 1$ 'e karşılık gelen  $H + 1$  tane özvektörü olduğuna dikkat edin.

(c) (b)'deki sonucu kullanarak, veya herhangi başka bir yöntemle, arayüz serbest enerjisini hesaplayın

•  $H \rightarrow \infty$  limitinde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{-2K_y} \sum_{n=1}^{H+1} T_{1n} = e^{-2K_y} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{H/2} e^{-2K_x n} \right) \\ &= e^{-2K_y} \left( 2 \sum_{n=0}^{H/2} e^{-2K_x n} - 1 \right) = e^{-2K_y} \coth K_x \end{aligned}$$

Şimdi,  $F = -Lk_B T \ln \lambda_1$ .

Alternatif olarak, bölüşüm fonksiyonunu doğrudan toplayabiliriz:

$$\begin{aligned} Z &= e^{-2K_y L} \sum_{\{h_n\}} \exp \left( -2K_x \sum_{n=1}^L |h_{n+1} - h_n| \right) = e^{-2K_y L} \left[ \sum_d \exp(-2K_x |d|) \right]^L \\ &= \left[ e^{-2K_y} \left( 2 \sum_{d \geq 0} e^{-2K_x d} - 1 \right) \right]^L = \left( e^{-2K_y} \coth K_x \right)^L \end{aligned}$$

ki

$$F = -Lk_B T [\ln(\coth K_x) - 2K_y]$$

verir.

(d) Arayüz serbest enerjisinin yok olması için,  $K_x$  ve  $K_y$  arasındaki koşulu bulun. Orijinal  $2d$  İsing modelindeki kritik sınıra karşılık geliyor mu?

• Arayüz enerjisi,

$$\coth K_x = e^{2K_y}$$

için yok olur, ki daha önceki bir problemin sonucu ile çakışır. Bu, uzun dalgaboylu salınımların, arayüzler gibi, kritiklikte düzenin bozulmasından sorumlu olduğunu gösterir.

\*\*\*\*\*

**8. Eşyönsüz Landau Teorisi:**  $d$  boyutta,  $n$  bileşenli mıknatıslanma alanını düşünün.

(a) Eşyönsüzlük üzerine önceki problemleri rehber olarak kullanarak, Landau-Ginzburg Hamiltoniyenini uzamsal eşyönsüzlüğü içerecek şekilde genelleştirin.

• Farklı uzamsal yönlerde, farklı çiftlenim sabitleri ile beraber spin uzayında dönme altında



değişmezlik koşulunu koymak, Hamiltoniyende aşağıdaki ana terimleri verir:

$$-\beta\mathcal{H} = \int d^d x \left[ \frac{t}{2} \vec{m}(\mathbf{x})^2 + \sum_{i=1}^d \frac{K_i}{2} \frac{\partial \vec{m}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial x_i} + u \vec{m}(\mathbf{q})^4 \right]$$

(b) Bu tür eşyönsüzlükler “önemli” midir?

- Açıkça, görünen eşyönsüzlük

$$x'_i = \sqrt{\frac{K}{K_i}} x_i$$

yeniden ölçeklenmesi ile ortadan kaldırılabilir. Üslü uzay koordinatları cinsinden, Hamiltoniyen eşyönlüdür. Özellikle, evrensel özellikler, eşyönsüz ve eşyönlü durumlarda özdeştir, ve dolayısıyla, eşyönsüzlük “önemsiz”dir ( $K_i$ 'ler hiç biri yok olmadığı sürece).

(c)  $La_2CuO_4$ 'te,  $Cu$  atomları, düzlemlerdeki kare bir ağ üzerine yerleşmiştir, ve sonra düzlemler biraraya konmuştur. Her  $Cu$  atomu bir “spin” taşır, bu spinin klasik olduğunu ve uzayda herhangi bir yönü gösterebileceğini varsayacağız. Düzlemde çok kuvvetli antiferromanyetik etkileşimler vardır. Ayrıca, ard arda gelen düzlemleri hizalamaya çalışan çok zayıf bir etkileşim de vardır. Düşük sıcaklık manyetik fazı kabataslak çizin, ve düzen-düzensizlik geçişinin hangi evrensellik sınıfına ait olduğunu belirtin.

- Klasik spinler için, bu antiferromanyet ve ferromanyet çiftlenim birleşimleri, saf ferromanyetik (eşyönsüz) sisteme denktir, çünkü iki alt ağdan birindeki bütün spinlerin, zıt işaretle yeniden tanımlayabiliriz (mesela bölüşüm fonksiyonunda). Bundan dolayı, kritik davranışı  $d = 3$ ,  $n = 3$  evrensellik sınıfına aittir.

Genede, öyle bir sıcaklık aralığı vardır ki, düzlem içi bağdaşıklık uzunluğu ağ aralığından uzunken, düzlemler arası bağdaşıklık uzunluğu ağ aralığı mertebesinde. Bu durumda sistemin davranışı  $d = 2$ ,  $n = 3$  teorisi ile iyi tasvir edilir.

\*\*\*\*\*

9. Eşyönsüz Doğrusal olmayan  $\sigma$  modeli:  $n$  bileşenli,

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2T} (\nabla \vec{s})^2 + g s_1^2 \right]$$

Hamiltoniyenine sahip,  $\vec{s}(\mathbf{x}) = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $\sum_{\alpha} s_{\alpha}^2 = 1$  olmak üzere, spinleri düşünün.  $g = 0$  için, renormalizasyon gurubu denklemleri, mesafeleri  $b = e^{\ell}$  çarpanı ile, ve spinleri  $\zeta = b^{y_s}$ ,  $y_s = -\frac{(n-1)}{4\pi} T$  olmak üzere, çarpanı ile yeniden ölçekleyerek elde edilebilir, ve aşağıdaki denklemi verirler:

$$\frac{dT}{d\ell} = -\epsilon T + \frac{(n-2)}{2\pi} T^2 + \mathcal{O}(T^3)$$

burada  $\epsilon = d - 2$ .

(a) Sabit noktayı, ve termal özdeğer  $y_T$ 'yi bulun.

- $dT/d\ell$ 'yi sıfıra eşitlersek, sabit nokta

$$T^* = \frac{2\pi\epsilon}{n-2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

olarak elde edilir. Yineleme bağıntılarını doğrusallaştırmak

$$y_T = -\epsilon + \frac{(n-2)}{\pi} T^* = +\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

verir.

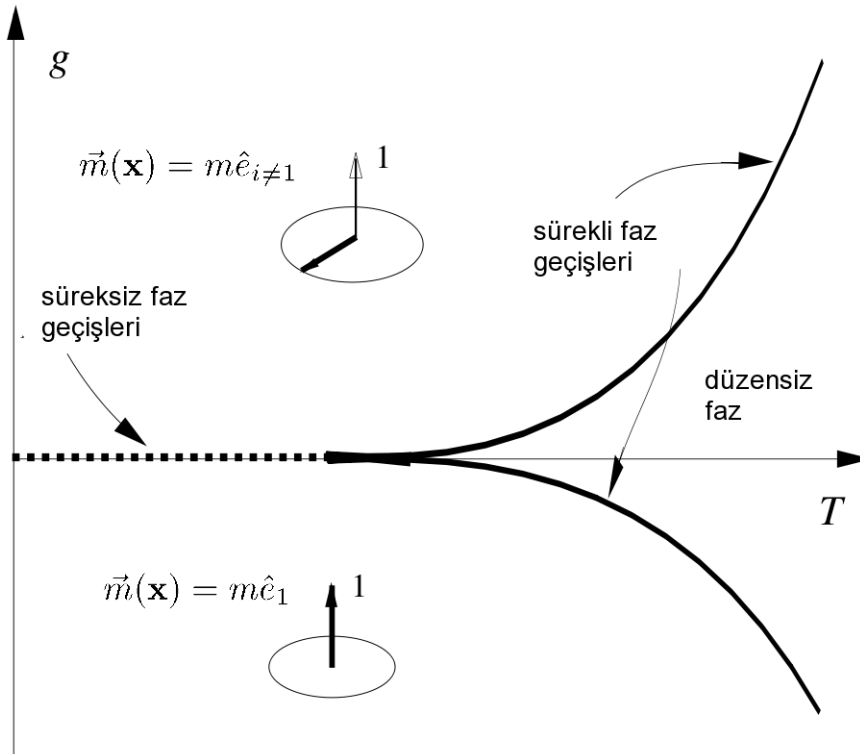
(b)  $g$  için renormalizasyon gurubu denklemini, yukarıdaki sabit nokta civarında yazın, ve karşılık gelen özdeğeri  $y_g$  elde edin.

•  $x \rightarrow bx'$  ve  $\vec{s} \rightarrow \zeta \vec{s}'$  yeniden ölçeklemeleri,  $g \rightarrow g' = b^d \zeta^2 g$  verir, ve dolayısıyla

$$y_g = d + 2y_s = d - \frac{n-1}{2\pi} T^* = 2 + \epsilon - \frac{n-1}{n-2} \epsilon = 2 - \frac{1}{n-2} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

(c) Faz diyagramını  $T$  ve  $g$ 'nin fonksiyonu olarak, fazları göstererek ve  $g \rightarrow 0$  iken faz sınırının şekline dikkat ederek, kabataslak çizin.

•  $g$  ile orantılı terim, dönme simetrisini kaldırır ve problem çözme saatlerinde tartışılan ikili kritik faz diyagramını verir.  $g < 0$  için fazın 1 yönünde düzeni varken,  $g > 0$  için, 1 yönüne dik  $(n-1)$  yönden herhangi birini tercih eder.  $g \rightarrow 0$  iken, faz sınırları  $g \propto (\delta T)^\phi$  olarak davranır,  $\phi = y_g/y_t \sim 2/\epsilon + \mathcal{O}(1)$  olmak üzere.



\*\*\*\*\*

**10. Matris modelleri:** Bazı durumlarda, düzen parametresi bir vektör yerine bir matristir. Mesela, üçgensel (Heisenberg) antiferromanyetlerde, her spin üçlüsü,  $120^\circ$  ile hizalanarak,

yerel olarak bir düzlem belirlerler. Bu düzlemin sistem boyunca değişimleri  $3 \times 3$ 'lük bir dönme matrisi ile gösterilir. Bu problemin genelleştirilmiş halini tasvir etmek için doğrusal olmayan bir  $\sigma$  modelini aşağıdaki gibi oluşturabiliriz.

$$\beta\mathcal{H} = \frac{K}{4} \int d^d \mathbf{x} \text{iz} \left[ \nabla M(\mathbf{x}) \cdot \nabla M^T(\mathbf{x}) \right]$$

Hamiltoniyeni düşünün, burada  $M$ , reel,  $N \times N$  ortagonal bir matristir, ve 'iz' iz alma işlemini gösterir. Ortagonellik koşulu,  $MM^T = M^T M = I$ , burada  $I$   $N \times N$  birim matristir, ve  $M^T$  devrik matristir,  $M_{ij}^T = M_{ji}$ . Bölüşüm fonksiyonu, bütün matris fonksiyonelleri üzerinden toplama yaparak elde edilir:

$$Z = \int \mathcal{D}M(\mathbf{x}) \delta \left( M(\mathbf{x})M^T(\mathbf{x}) - I \right) e^{-\beta\mathcal{H}[M(\mathbf{x})]}$$

(a) Hamiltoniyeni ve ortagonellik koşulunu,  $M_{ij}$ , ( $i, j = 1, \dots, N$ ) matris elemanları cinsinden yeniden yazın. Sistemin temel durumunu tasvir edin.

- Matris elemanları cinsinden, Hamiltoniyen

$$\beta\mathcal{H} = \frac{K}{4} \int d^d x \sum_{i,j} \nabla M_{ij} \cdot \nabla M_{ij}$$

halini alır, ve diklik koşulu

$$\sum_k M_{ik} M_{jk} = \delta_{ij}$$

olur.  $\nabla M_{ij} \cdot \nabla M_{ij} \geq 0$  olduğu için, herhangi bir sabit (uzamsal olarak düzgün) ortagonal matris, temel durumu oluşturur.

(b) Simetrik ve anti-simetrik matrisleri

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{2}(M + M^T) = \sigma^T \\ \pi = \frac{1}{2}(M - M^T) = -\pi^T \end{cases}$$

şeklinde tanımlayın.  $\beta\mathcal{H}$  ve ortagonellik koşulunu,  $\sigma$  ve  $\pi$  matrisler cinsinden ifade edin.

- $M = \sigma + \pi$  ve  $M^T = \sigma - \pi$  olduğundan,

$$\beta\mathcal{H} = \frac{K}{4} \int d^d x \text{iz} \left[ \nabla(\sigma + \pi) \cdot \nabla(\sigma - \pi) \right] = \frac{K}{4} \int d^d x \text{iz} \left[ (\nabla\sigma)^2 - (\nabla\pi)^2 \right]$$

burada (kolayca kontrol edilebileceği gibi)  $\nabla\sigma$  ve  $\nabla\pi$  matrislerinin komütatörlerinin sıfır olduğunu kullandık. Benzer şekilde, diklik koşulu

$$\sigma^2 - \pi^2 = I$$

şeklinde yazılır, burada  $I$  birim matristir.

(c) Düzenli durum  $M(\mathbf{x}) = I$  etrafında küçük salınımları düşünün.  $\sigma$ 'nın  $\pi$ 'nin kuvvetleri cinsin-

den

$$\sigma = I - \frac{1}{2}\pi\pi^T + \dots$$

şeklinde yazılabileceğini gösterin. Ortagonallık koşulunu kullanarak,  $\sigma$  integralini alın, ve  $\beta\mathcal{H}$  için  $\pi$ 'de dördüncü dereceden bir ifade elde edin. İki farklı türden dördüncü derece terim olduğuna dikkat edin. Delta fonksiyonunun argümanı tarafından yaratılan terimleri *dahil etmeyin*. Metinde, doğrusal olmayan  $\sigma$  modeli için gösterildiği gibi, bu terimler sonucu en düşük mertebede etkilemez.

•

$$\sigma^2 = I + \pi^2 = I - \pi\pi^T$$

ifadesinin karekökünü almak

$$\sigma = I - \frac{1}{2}\pi\pi^T + \mathcal{O}(\pi^4)$$

verir ( $I - \pi\pi^T/2$ 'nin karesini alarak kolayca kontrol edilebilir.) Şimdi,  $\sigma$ 'nin integralini alarak,

$$Z = \int \mathcal{D}\pi(\mathbf{x}) \exp \left\{ \frac{K}{4} \int d^d x \text{iz} \left[ (\nabla\pi)^2 - \frac{1}{4} (\nabla(\pi\pi^T))^2 \right] \right\}$$

elde ederiz, burada  $\mathcal{D}\pi(\mathbf{x}) = \prod_{j>i} \mathcal{D}\pi_{ij}(\mathbf{x})$ , ve  $\pi$  köşegeninde sıfırlar olan, ve köşegenin altındaki elemanları  $\pi_{ij} = -\pi_{ji}$  olan bir matristir. Deltanın argümanları tarafından yaratılan terimleri katmadığımızı dikkat edin. Böyle terimler, ki  $\pi$  integralinin ölçütünün simetrik olmasını sağlar, en düşük mertebede  $K$ 'nin renormalizasyonuna katkı vermez. Dördüncü mertebeden terimlerin katkısının,  $\pi$  ve  $\nabla\pi$ 'nin yer değiştirememesinden dolayı, iki türlü olduğuna dikkat edin. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \left[ \nabla (\pi\pi^T) \right]^2 &= \left[ \nabla (\pi^2) \right]^2 = [(\nabla\pi)\pi + \pi\nabla\pi]^2 \\ &= (\nabla\pi)\pi \cdot (\nabla\pi)\pi + (\nabla\pi)\pi^2 \cdot \nabla\pi + \pi(\nabla\pi)^2\pi + \pi(\nabla\pi)\pi \cdot \nabla\pi \end{aligned}$$

ve, iz, devirli yerdeğişimlerle değişmediği için,

$$\text{iz} \left[ \nabla (\pi\pi^T) \right]^2 = 2 \text{iz} \left[ (\pi\nabla\pi)^2 + \pi^2(\nabla\pi)^2 \right]$$

(d)  $N$ -vektör düzen parametresi için,  $N - 1$  Goldstone modu vardır. Ortagonal  $N \times N$  düzen parametresinin  $N(N - 1)/2$  böyle moda yol açtığını gösterin.

•  $\pi$ 'nin antisimetrisi,  $N \times N$  matris elemanı için,  $N(N + 1)/2$  koşul getirir, ve dolayısıyla matrisin  $N^2 - N(N + 1)/2 = N(N - 1)/2$  bağımsız bileşeni (Goldstone modları) vardır. [Benzer  $\mathcal{O}(n)$  modelindeki hesapta, spinlerin genliğini bire eşitleyen bir koşul vardır; ve geri kalan  $n - 1$  açılal bileşen Goldstone modlarıdır.]

(e)  $\beta\mathcal{H}$ 'in ikinci derece kısmını düşünün. İki nokta bağdaşlık fonksiyonun, Fourier uzayında

$$\langle \pi_{ij}(\mathbf{q})\pi_{kl}(\mathbf{q}') \rangle = \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{Kq^2} [\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}]$$

olduğunu gösterin.

- $\pi_{ij}(\mathbf{q})$  Fourier bileşenleri cinsinden, (c)'deki Hamiltoniyeenin ikinci dereceden kısmı

$$\beta\mathcal{H}_0 = \frac{K}{2} \sum_{i<j} \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} q^2 |\pi_{ij}(\mathbf{q})|^2$$

olur, ki aşağıdaki çıplak beklenen değerlere yol açar:

$$\langle \pi_{ij}(\mathbf{q}) \pi_{ij}(\mathbf{q}') \rangle_0 = \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{K q^2}$$

ve

$$\langle \pi_{ij}(\mathbf{q}) \pi_{kl}(\mathbf{q}') \rangle_0 = 0, \quad \text{eger } (ij) \text{ ve } (kl) \text{ çiftleri farklı ise}$$

Dahası,  $\pi$  antisimetrik olduğu için,

$$\langle \pi_{ij}(\mathbf{q}) \pi_{ji}(\mathbf{q}') \rangle_0 = -\langle \pi_{ij}(\mathbf{q}) \pi_{ij}(\mathbf{q}') \rangle_0$$

ve özellikle  $\langle \pi_{ii}(\mathbf{q}) \pi_{jj}(\mathbf{q}') \rangle_0 = 0$ . Bu sonuçlar

$$\langle \pi_{ij}(\mathbf{q}) \pi_{kl}(\mathbf{q}') \rangle_0 = \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{K q^2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk})$$

olarak özetlenebilir.

Şimdi,  $q'$  değeri  $\lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda$  kabuğundan olan  $M^>(\mathbf{q})$  modlarını kaldırarak, renormalizasyon gurubunu oluşturacağız.

(f) Bu modları kaldırdıktan sonra, düşük sıcaklıklarda,  $\langle \dot{\mathbf{z}}(\sigma) \rangle_0^>$  kabalaştırılmış beklenen değerini hesaplayın.  $\dot{\mathbf{z}}(M') = \dot{\mathbf{z}}(\sigma') = N$  yapan,  $M'(\mathbf{x}') = M^<(\mathbf{x})/\zeta$  ölçekleme çarpanını belirleyin

- Kısa dalgaboylu salınımların sonucu olarak,  $\dot{\mathbf{z}}\sigma$

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{z}}\sigma \rangle_0^> &= \left\langle \dot{\mathbf{z}} \left( I + \frac{\pi^2}{2} + \dots \right) \right\rangle_0^> \approx N + \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{z}}\pi^2 \rangle_0^> \\ &= N + \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i \neq j} \pi_{ij} \pi_{ji} \right\rangle_0^> = N - \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i \neq j} \pi_{ij}^2 \right\rangle_0^> = N - \frac{1}{2} (N^2 - N) \langle \pi_{ij}^2 \rangle_0^> \\ &= N \left( 1 - \frac{N-1}{2} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{K q^2} \right) = N \left[ 1 - \frac{N-1}{2K} I_d(b) \right] \end{aligned}$$

ifadesine indirgenir.  $\dot{\mathbf{z}}M' = \dot{\mathbf{z}}\sigma' = N$ 'yi yeniden sağlamak için, matrisin bütün elemanlarını

$$\zeta = 1 - \frac{N-1}{2K} I_d(b)$$

ile ölçekleriz.

*NOT:* Ortanormal bir  $M$  matrisinin tersi vardır ( $M^{-1} = M^T$ ), ve dolayısıyla, köşegenleştirilebilir. Köşegenel halde, devrik matris, matrisin kendisine eşittir, ve dolayısıyla karesi birimdir, ki bu da her öz değerinin ya +1 ya da -1 olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, eğer  $M$ , birim matrise çok

yakın seçilirse, bütün özdeğerler +1 olur, ve  $\text{iz}M = N$  (iz koordinat bazından bağımsız olduğu için)

(g) Tedirgeme kuramını kullanarak, kabalaştırılmış çiftlenim sabitini  $\tilde{K}$  hesaplayın. Sadece,  $\beta\mathcal{H}$ 'deki  $(\nabla\pi_{ij})^2$  terimini doğrudan renormalize eden iki diyagramı hesaplayın ve

$$\tilde{K} = K + \frac{N}{2} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2}$$

olduğunu gösterin.

• Daha büyük ve daha küçük modları ayrıştırarak, bölüşüm fonksiyonunu

$$Z = \int \mathcal{D}\pi^< \mathcal{D}\pi^> e^{-\beta\mathcal{H}_0^< -\beta\mathcal{H}_0^> + U[\pi^<, \pi^>]} = \int \mathcal{D}\pi^< e^{-\delta f_b^0 - \beta\mathcal{H}_0^<} \langle e^U \rangle_0^>$$

olarak yazarız, burada  $\mathcal{H}_0$  ikinci dereceden kısmı, ve

$$\begin{aligned} U &= -\frac{K}{8} \sum_{i,j,k,l} \int d^d x [(\nabla\pi_{ij})\pi_{jk} \cdot (\nabla\pi_{kl})\pi_{li} + \pi_{ij}(\nabla\pi_{jk}) \cdot (\nabla\pi_{kl})\pi_{li}] \\ &= \frac{K}{8} \sum_{i,j,k,l} \int \frac{d^d q_1 d^d q_2 d^d q_3}{(2\pi)^{3d}} [(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_3) \cdot \\ &\quad \cdot \pi_{ij}(\mathbf{q}_1)\pi_{jk}(\mathbf{q}_2)\pi_{kl}(\mathbf{q}_3)\pi_{li}(-\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3)] \end{aligned}$$

ifadesini gösterir.  $U$ 'de birinci mertebeye kadar, aşağıdaki iki ortalama,  $K$ 'nın renormalizasyonuna katkı verir:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{K}{8} \sum_{i,j,k,l} \int \frac{d^d q_1 d^d q_2 d^d q_3}{(2\pi)^{3d}} \langle \pi_{jk}^>(\mathbf{q}_2)\pi_{li}^>(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \rangle_0^> (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_3)\pi_{ij}^<(\mathbf{q}_1)\pi_{kl}^<(\mathbf{q}_3) \\ &= \frac{K}{8} \left( \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \frac{1}{Kq'^2} \right) \left( \int_0^{\Lambda/b} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} q^2 \sum_{i,j} \pi_{ij}^<(\mathbf{q})\pi_{ji}^<(-\mathbf{q}) \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (ii) \quad & \frac{K}{8} \sum_{j,k,l} \int \frac{d^d q_1 d^d q_2 d^d q_3}{(2\pi)^{3d}} \left\langle \sum_{i \neq j,l} \pi_{ij}^>(\mathbf{q}_2)\pi_{li}^>(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \right\rangle_0^> (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_3)\pi_{jk}^<(\mathbf{q}_2)\pi_{kl}^<(\mathbf{q}_3) \\ &= \frac{K}{8} \left[ (N-1) \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \frac{1}{Kq'^2} \right] \left( \int_0^{\Lambda/b} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} q^2 \sum_{j,k} \pi_{jk}^<(\mathbf{q})\pi_{kj}^<(-\mathbf{q}) \right) \end{aligned}$$

İki katkıyı da toplayarak, etkin çiftlenim

$$\frac{\tilde{K}}{4} = \frac{K}{4} + \frac{K}{8} N \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{Kq^2}, \quad \text{yani} \quad \tilde{K} = K + \frac{N}{2} I_d(b)$$

olarak elde edilir.

(h) (f)'deki sonucu kullanarak, matris yeniden ölçeklemesinden sonra,  $K'$  için RG denkleminin

$$K' = b^{d-2} \left[ K - \frac{N-2}{2} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2} \right]$$

olarak verildiğini gösterin.

• Kabalaştırma, alanları renormalize etme, ve yeniden ölçeklemeden sonra

$$\begin{aligned} K' &= b^{d-2} \zeta^2 \tilde{K} = b^{d-2} \left[ 1 - \frac{N-1}{K} I_d(b) \right] K \left[ 1 + \frac{N}{2K} I_d(b) \right] \\ &= b^{d-2} \left[ K - \frac{N-2}{2} I_d(b) + \mathcal{O}(1/K) \right] \end{aligned}$$

yani, banal olmayan en düşük mertebede,

$$K' = b^{d-2} \left[ K - \frac{N-2}{2} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2} \right]$$

(i)  $T = 1/K$  için, *differansiyel* RG denklemlerini  $b = 1 + \delta\ell$  olarak elde edin.  $d < 2$  ve  $d = 2$  için akışları kabataslak çizin.  $d = 2 + \epsilon$  için,  $T_c$  ve kritik üstel  $\nu$ 'yü hesaplayın.

• Differansiyel yineleme bağıntıları, çok küçük  $b = 1 + \delta\ell$ 'den

$$K' = K + \frac{dK}{d\ell} \delta\ell = [1 + (d-2)\delta\ell] \left[ K - \frac{N-2}{2} K_d \Lambda^{d-2} \delta\ell \right]$$

olarak elde edilir, ki

$$\frac{dK}{d\ell} = (d-2)K - \frac{N-2}{2} K_d \Lambda^{d-2}$$

verir.  $T = 1/K$  için karşılık gelen denklemi elde etmek için, yukarıdaki bağıntıyı  $-K^{-2}$ 'ye bölerek,

$$\frac{dT}{d\ell} = (2-d)T + \frac{N-2}{2} K_d \Lambda^{d-2} T^2$$

elde edilir.  $d < 2$  için, her zamanki iki ilginç olmayan sabit nokta vardır: 0 (kararsız) ve  $\infty$  (kararlı). Sistem, yüksek sıcaklıklara, kabalaştırma ile eşleştirilir. Aynıısı  $d = 2$  ve  $N > 2$  için de geçerlidir.

$d > 2$  için, 0'da  $\infty$ 'da kararlıdır, ve ilginç bir sabit nokta sonlu sıcaklıkta ortaya çıkar, ve  $dT/d\ell = 0$  ile verilir, yani

$$T^* = \frac{2(d-2)}{(N-2)K_d \Lambda^{d-2}} = \frac{4\pi\epsilon}{N-2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Sabit noktanın civarında, akışlar

$$\begin{aligned} \delta T' &= \left[ 1 + \frac{d}{dT} \left( \frac{dT}{d\ell} \right) \Big|_{T^*} \delta\ell \right] \delta T = \left\{ 1 + [(2-d) + (N-2)K_d \Lambda^{d-2} T^*] \delta\ell \right\} \delta T \\ &= (1 + \epsilon\delta\ell) \delta T \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\delta T' = b^{y_T} \delta T = (1 + y_T \delta \ell) \delta T$$

ifadesinden,  $y_T = \epsilon$ , ve

$$\nu = \frac{1}{\epsilon}$$

elde ederiz.

(j) Hamiltoniyene eklenen küçük bir simetri kıran terimi  $-h \int d^d \mathbf{x} \dot{z}(M)$  düşünün.  $h$ 'nin renormalizasyonunu bulun ve karşılık gelen  $y_h$  üstelini belirleyin.

• Herzamanki gibi,  $h$

$$\begin{aligned} h' &= b^d \zeta h = (1 + d \delta \ell) \left( K - \frac{N-1}{2K} K_d \Lambda^{d-2} \delta \ell \right) h \\ &= \left[ 1 + \left( d - \frac{N-1}{2K} K_d \Lambda^{d-2} \right) \delta \ell + \mathcal{O}(\delta \ell^2) \right] h \end{aligned}$$

denklemine göre renormalize olur.  $h' = b^{y_h} h = (1 + y_h \delta \ell) h$  ifadesinden,

$$y_h = d - \frac{N-1}{2K^*} K_d \Lambda^{d-2} = d - \frac{N-1}{N-2} (d-2) = 2 - \frac{\epsilon}{N-2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

elde ederiz.

RG ve simetri ispatlarını birleştirerek,  $3 \times 3$  matris modelinin, tedirgemeli olarak  $N = 4$  vektör modeline bütün mertebelerde eşit olduğu gösterilebilir. Bu, yığılanmış üçgensel anti-ferromanyetlerin,  $\mathcal{O}(4)$  evrensellik sınıfının bir gerçekleştirilmesini sunduğu anlamına gelebilir; bkz. P. Azaria, B. Delamotte, ve T. Jolicoeur, J. Appl. Phys. **69**, 6170 (1991). Ancak, tedirgeme dışı (topolojik özellikler) S.V. Isakov, T. Senthil, Y. B. Kim, Phys. Rev. B **72**, 174417 (2005)'de tartışıldığı gibi, bu denkleği ortadan kaldırıyor gibi görünüyor.

\*\*\*\*\*

**11. Pürüzleşme geçişi:**  $d = 3$ 'te

$$\beta \mathcal{H}_0 = -\frac{K}{2} \int d^2 \mathbf{x} (\nabla h)^2$$

Hamiltoniyeni ile tarif edilen sürekli arayüz modelini düşünün, burada  $h(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}$  noktasındaki arayüzün yüksekliğidir. Kristalize bir yüz için,  $h$ 'nin mümkün değerleri, ağ aralığının katlarıdır. Süreklilikte,  $h$ 'nin tamsayı değerleri için eğilimi, Hamiltoniyen'e

$$-\beta U = y_0 \int d^2 \mathbf{x} \cos(2\pi h)$$

terimi eklenerek taklit edilebilir.  $-\beta U$ 'yu tedirgeme olarak ele alın, ve aşağıdakileri takip ederek, renormalizasyon gurubunu oluşturun:

(a)  $\sum_{\alpha} q_{\alpha} = 0$  için

$$\left\langle \exp \left[ i \sum_{\alpha} q_{\alpha} h(\mathbf{x}_{\alpha}) \right] \right\rangle_0 = \exp \left[ \frac{1}{K} \sum_{\alpha < \beta} q_{\alpha} q_{\beta} C(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}) \right]$$



olduğunu, aksi takdirde, sıfır olduğunu ispatlayın. ( $C(\mathbf{x}) = \ln |\mathbf{x}|/2$ , iki boyutta Coulomb etkileşimidir.)

• Hamiltoniyenin öteleme simetrisi,  $\langle \exp [i \sum_{\alpha} q_{\alpha} h(\mathbf{q}_{\alpha})] \rangle_0$ 'ın  $\sum_{\alpha} q_{\alpha} = 0$  değilse yok olmasını sağlar, ki aşağıdaki bağıntıdan çıkarılabilir:

$$\begin{aligned} \exp \left( i \delta \sum_{\alpha} q_{\alpha} \right) \left\langle \exp \left[ i \sum_{\alpha} q_{\alpha} h(\mathbf{q}_{\alpha}) \right] \right\rangle_0 &= \left\langle \exp \left\{ i \sum_{\alpha} q_{\alpha} [h(\mathbf{q}_{\alpha}) + \delta] \right\} \right\rangle_0 \\ &= \left\langle \exp \left[ i \sum_{\alpha} q_{\alpha} h(\mathbf{q}_{\alpha}) \right] \right\rangle_0 \end{aligned}$$

Son eşitlik,  $\mathcal{H}[h(\mathbf{x}) + \delta] = \mathcal{H}[h(\mathbf{x})]$  simetrisinden gelir. Gaussiyen ortalamaların özelliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left[ i \sum_{\alpha} q_{\alpha} h(\mathbf{q}_{\alpha}) \right] \right\rangle_0 &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha} q_{\beta} \langle h(\mathbf{x}_{\alpha}) h(\mathbf{x}_{\beta}) \rangle_0 \right] \\ &= \exp \left[ \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha} q_{\beta} \langle (h(\mathbf{q}_{\alpha}) - h(\mathbf{x}_{\beta}))^2 \rangle_0 \right] \end{aligned}$$

alabiliriz.  $\langle h(\mathbf{x}_{\alpha}) h(\mathbf{x}_{\beta}) \rangle_0$  niceliğinin,  $h(\mathbf{x}) \rightarrow h(\mathbf{x}) + \delta$  simetrisinden dolayı muğlak olduğuna dikkat ediniz.  $\sum_{\alpha} q_{\alpha} = 0$  olduğu zaman, yukarıdaki toplamdaki bu niceliği, yükseklik farkıyla  $\langle (h(\mathbf{x}_{\alpha}) - h(\mathbf{x}_{\beta}))^2 \rangle_0$ , ki bu simetriden bağımsızdır, yer değiştirebiliriz. (Bu belirsizlik, yada simetri, ikinci dereceden çekirdeğin, sıfır özdeğere sahip olmasından kaynaklanır, ki bu, tersini alırken dikkat etmemiz gerektiği anlamına gelir.) Şimdi, her zamanki gibi devam edebiliriz, ve

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left[ i \sum_{\alpha} q_{\alpha} h(\mathbf{x}_{\alpha}) \right] \right\rangle_0 &= \exp \left[ \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{4} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{(e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_{\alpha}} - e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_{\beta}})(e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_{\alpha}} - e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_{\beta}})}{K q^2} \right] \\ &= \exp \left[ \sum_{\alpha<\beta} q_{\alpha} q_{\beta} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1 - \cos(\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}))}{K q^2} \right] \\ &= \exp \left[ \frac{1}{K} \sum_{\alpha<\beta} q_{\alpha} q_{\beta} C(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}) \right] \end{aligned}$$

burada

$$C(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})}{q^2} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{x}|}{a}$$

iki boyutta,  $a$  kısa mesafe sınırlı Coulomb etkileşmesidir.

(b)

$$\langle |h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})|^2 \rangle = - \left. \frac{d^2}{dk^2} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right|_{k=0}$$

olduğunu ispatlayın, burada  $G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \langle \exp [ik (h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y}))] \rangle$  olmak üzere.

- $G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 'nin tanımından,

$$\frac{d^2}{dk^2} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = - \left\langle [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})]^2 \exp [ik(h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y}))] \right\rangle$$

Bu özdeşlikte,  $k$ 'yı sıfır alırsak,

$$\left\langle [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})]^2 \right\rangle = - \left. \frac{d^2}{dk^2} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right|_{k=0}$$

özdeşliğini buluruz.

(c) (a)'daki sonuçları kullanarak,  $G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 'yi  $y_0^2$  mertebesine kadar hesaplayın. (İpucu:  $\cos(2\pi h) = (e^{2i\pi h} + e^{-2i\pi h})/2$  olarak alın. İlk terim, (a)'daki sonuca göre yok olurken, ikinci merteye katkı, yapı olarak, bu bölümde daha önce tasvir edilen Coulomb gazıyla özdeştir.)

- İpucunu takip ederek, tedirgemeyi

$$-U = y_0 \int d^2x \cos(2\pi h) = \frac{y_0}{2} \int d^2x [e^{2i\pi h} + e^{-2i\pi h}]$$

olarak yazarız.  $G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \langle \exp [ik(h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y}))] \rangle \equiv \langle \mathcal{G}_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle$  için tedirgeme açılımı

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_k \rangle &= \langle \mathcal{G}_k \rangle_0 - (\langle \mathcal{G}_k U \rangle_0 - \langle \mathcal{G}_k \rangle_0 \langle U \rangle_0) \\ &+ \frac{1}{2} \left( \langle \mathcal{G}_k U^2 \rangle_0 - 2 \langle \mathcal{G}_k U \rangle_0 \langle U \rangle_0 + 2 \langle \mathcal{G}_k \rangle_0 \langle U \rangle_0^2 - \langle \mathcal{G}_k \rangle_0 \langle U^2 \rangle_0 \right) + \mathcal{O}(U^3) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. (a) kısmından,

$$\langle U \rangle_0 = \langle \mathcal{G}_k U \rangle_0 = 0$$

ve

$$\langle \mathcal{G}_k \rangle_0 = \exp \left[ -\frac{k^2}{K} C(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] = \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{a} \right)^{-\frac{k^2}{2\pi K}}$$

Dahası,

$$\begin{aligned} \langle U^2 \rangle_0 &= \frac{y_0^2}{2} \int d^2\mathbf{x}' d^2\mathbf{x}'' \langle \exp [2i\pi(h(\mathbf{x}') - h(\mathbf{x}''))] \rangle_0 \\ &= \frac{y_0^2}{2} \int d^2\mathbf{x}' d^2\mathbf{x}'' \langle \mathcal{G}_{2\pi}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \rangle_0 = \frac{y_0^2}{2} \int d^2\mathbf{x}' d^2\mathbf{x}'' \exp \left[ -\frac{(2\pi)^2}{K} C(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right] \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} \langle \exp [ik(h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y}))] U^2 \rangle_0 &= \\ &= \frac{y_0^2}{2} \int d^2\mathbf{x}' d^2\mathbf{x}'' \exp \left\{ -\frac{k^2}{K} C(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{(2\pi)^2}{K} C(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \right. \\ &+ \left. \frac{2\pi k}{K} [C(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + C(\mathbf{y} - \mathbf{x}'')] - \frac{2\pi k}{K} [C(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') + C(\mathbf{y} - \mathbf{x}')] \right\} \end{aligned}$$

Dolayısıyla,  $G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 'nin ikinci derece kısmı

$$\frac{y_0^2}{4} \exp\left[-\frac{k^2}{K}C(\mathbf{x} - \mathbf{y})\right] \int d^2x' d^2x'' \exp\left[-\frac{4\pi^2}{K}C(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')\right] \cdot \left\{ \exp\left[\frac{2\pi k}{K}(C(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + C(\mathbf{y} - \mathbf{x}'') - C(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') - C(\mathbf{y} - \mathbf{x}'))\right] - 1 \right\}$$

ve

$$G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = e^{-\frac{k^2}{K}C(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left\{ 1 + \frac{y_0^2}{4} \int d^2\mathbf{x}' d^2\mathbf{x}'' e^{-\frac{4\pi^2}{K}C(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'')} \left( e^{\frac{2\pi k}{K}\mathcal{D}} - 1 \right) + \mathcal{O}(y_0^4) \right\}$$

olur, burada  $\mathcal{D} = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + C(\mathbf{y} - \mathbf{x}'') - C(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') - C(\mathbf{y} - \mathbf{x}')$ .

(d) Tedirgeme sonucunu, etkin bir etkileşme  $K$  cinsinden yazın, ve kritik bir  $K_c$ 'den büyük  $K$  için, tedirgeme kuramının uygulanamaz olduğunu gösterin.

•  $G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  için yukarıdaki ifade, XY modelindeki girdaplardan oluşan Coulomb gazının renormalizasyonunda elde ettiğimize çok benzer. Ders notlarındaki adımları takip ederek, daha fazla işlem yapmadan

$$\begin{aligned} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= e^{-\frac{k^2}{K}C(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left\{ 1 + \frac{y_0^2}{4} \times \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi k}{K} \right)^2 \times C(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times 2\pi \int dr r^3 e^{-\frac{2\pi \ln(r/a)}{K}} \right\} \\ &= e^{-\frac{k^2}{K}C(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left\{ 1 + \frac{\pi^3 k^2}{K^2} y_0^2 C(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int dr r^3 e^{-\frac{2\pi \ln(r/a)}{K}} \right\} \end{aligned}$$

buluruz. İkinci mertebeye terim, üstele atılabilir, ve etkin çiftlenim sabitine

$$\frac{1}{K_{\text{etkin}}} = \frac{1}{K} - \frac{\pi^3}{K^2} e^{2\pi/K} y_0^2 \int_a^\infty dr r^{3-2\pi/K}$$

şeklinde katkı verir. Açıkça, yukarıdaki integral ıraksarsa, tedirgeme kuramı tutarsızdır, yani eğer

$$K > \frac{\pi}{2} \equiv K_c$$

(e) (d) kısmındaki tedirgeme sonucunu, “ağ aralığını”  $a$ 'dan  $ae^\ell$ 'e değiştirerek,  $K$  ve  $y_0$  için, renormalizasyon gurup denklemleri haline sokun,

• İntegrali  $a$ 'dan  $ab$ 'ye ve  $ab$ 'den  $\infty$ 'a kadar iki kısma böldükten, ve ikinci kısımdaki integral değişkenini, her zamanki integral limitlerini elde etmek için yeniden ölçekledikten sonra,

$$\frac{1}{K_{\text{etkin}}} = \frac{1}{K} - \frac{\pi^3}{K^2} a^{2\pi/K} y_0^2 \int_a^{ab} dr r^{3-2\pi/K} - \frac{\pi^3}{K^2} a^{2\pi/K} \times y_0^2 b^{4-2\pi/K} \times \int_a^\infty dr r^{3-2\pi/K}$$

elde ederiz. ( $y_0^2$  mertebesine kadar, fark yaratmadan, son terimde  $K$  veya  $K'$  (aşağıda tanımlanmıştır) yazabiliriz) Bir başka deyişle, kabalaştırılmış sistem, şekil olarak aynı, ama renormalize edilmiş niceliklerler

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{K} - \frac{\pi^3}{K^2} a^{2\pi/K} y_0^2 \int_a^{ab} dr r^{3-2\pi/K}$$

ve

$$y_0'^2 = b^{4-2\pi/K} y_0^2$$

cinsinden tanımlanmış etkileşimlerle tanımlanır.  $b = e^\ell \sim 1 + \ell$  ile, bu RG bağıntıları, renomalizasyon gurubu akışlarını tasvir eden aşağıdaki differansiyel denklemler şeklinde yazılır

$$\begin{cases} \frac{dK}{d\ell} = \pi^3 a^4 y_0^2 + \mathcal{O}(y_0^4) \\ \frac{dy_0}{d\ell} = (2 - \frac{\pi}{K}) y_0 + \mathcal{O}(y_0^3) \end{cases}$$

(f) Yineleme bağıntılarını kullanarak, modelin faz diyagramını ve fazlarını tartışın.

• Bu RG denklemleri, XY modelininkilere benzerler, (buradaki)  $K$ , Coulomb gazındaki  $T$ 'nin yerini alır. Sıfırdan farklı  $y_0$  için,  $K$  önemlidir, ve dolayısıyla, daha büyük değerlere akar (tedirgeme alanının dışına) eğer  $y_0$  da önemliyse ( $K > \pi/2$ ), ki düşük sıcaklıklarda ( $T \sim K^{-1}$ ), pürüzsüz bir fazın var olduğunu ima eder.  $K$ 'nın küçük değerlerinde,  $y_0$  önemsizdir, ve akışlar  $y_0 = 0$  ve  $K \leq \pi/2$  olan bir sabit çizgide biter, ki yüksek sıcaklıklarda pürüzlü bir faza karşılık gelir.

(g) Büyük  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  aralıkları için, geçişte,  $\langle |h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})|^2 \rangle$ 'nin süreksiz sıçramasının genliğini bulun.

• Geçişin civarında uzun mesafe bağıdaşlıklarını hesaplamak istiyoruz. Denk olarak, kabalaştırılmış bağıdaşlıkları hesaplayabiliriz. Eğer sistem,  $K = \pi/2^-$  ve  $y_0 \approx 0$ 'da hazırlanmışsa, kabalaştırma altında,  $K \rightarrow \pi/2^-$  ve  $y_0 \rightarrow 0$ , ki

$$G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rightarrow \langle G_k \rangle_0 = \exp \left[ -\frac{2k^2}{\pi} C(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right]$$

verir. (b) kısmından,

$$\langle [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})]^2 \rangle = -\frac{d^2}{dk^2} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Big|_{k=0} = \frac{4}{\pi} C(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{2}{\pi^2} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

Diğer taraftan, eğer sistem  $K = \pi/2^+$ 'da hazırlanmışsa, o zaman RG altında,  $K \rightarrow \infty$  ( $K$ 'nin önemliliğinin tedirgeme bölgesinin dışında da geçerli olduğunu varsayarsak), ve

$$\langle [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})]^2 \rangle \rightarrow 0$$

Dolayısıyla, geçişte,  $\langle [h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})]^2 \rangle$ 'in genliğindeki atlama

$$\frac{2}{\pi^2} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

olur.

\*\*\*\*\*

**12. Pürüzleşme ve eşleklik:** Bir önceki problemdeki Hamiltoniyenin kesikleştirilmiş halini düşünün, öyle ki kare ağın her  $i$  konumunda, tam sayı değerli bir yükseklik vardır  $h_i$ .

Hamiltoniyen

$$\beta\mathcal{H} = \frac{K}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} |h_i - h_j|^\infty$$

olarak verilir, burada “ $\infty$ ” kuvveti,  $\Delta h = 0$  için hiçbir enerji maliyeti olmadığı;  $\Delta h = \pm 1$  için  $K/2$  kadar enerji maliyeti olduğu, ve  $\Delta h = \pm 2$  veya daha fazla olmasının, komşu konumlar için *mümkün olmadığı* anlamına gelir. (Bu, sınırlanmış katı üzerine katı (SKÜK) modeli olarak bilinir)

(a) Eşlek modeli diyagramatik olarak, veya şu adımları takip ederek oluşturunuz:

(i)  $N$  konum değişkeninden  $h_i$ ,  $2N$  bağı değişkenine  $n_{ij} = h_i - h_j$  geçin.  $n_{ij}$ 'nin herhangi bir plaka etrafındaki toplamının sıfır olduğunu gösterin.

(ii)  $n$  tamsayıları için,  $\int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta n} / 2\pi = \delta_{n,0}$  özdeşliğini kullanarak, koşulları zorlayın.

(iii) Koşulları zorladıktan sonra,  $n_{ij}$  değerleri üzerinden toplamı serbestçe yaparak, komşu plakalar üzerindeki eşlek değişkenler  $\theta_i$  arasındaki eşlek etkileşimi  $\tilde{v}(\theta_i - \theta_j)$  elde edin.

• (i) Bağ değişkenleri  $n_{ij} = h_i - h_j$  cinsinden, Hamiltoniyen

$$-\beta\mathcal{H} = -\frac{K}{2} \sum_{\langle ij \rangle} |n_{ij}|^\infty$$

olarak yazılır. Açıkça

$$\sum_{\text{herhangi bir kapalı ilmek}} n_{ij} = h_{i_1} - h_{i_2} + h_{i_2} - h_{i_3} + \dots + h_{i_{n-1}} - h_{i_n} = 0$$

çünkü kapalı bir ilmekte  $h_{i_1} = h_{i_n}$  olur.

(ii) Bu koşul,  $N$  plakaya uygulanırsa, serbestlik derecelerini görünürdeki  $2N$ 'den (bağlar), gerçek sayı  $N$ 'ye indirir, ve bölüşüm fonksiyonu

$$Z = \sum_{\{n_{ij}\}} e^{-\beta\mathcal{H}} \prod_{\alpha} \delta_{\sum_{\langle ij \rangle} n_{ij}^\alpha, 0}$$

halini alır, burada  $\alpha$  indeksi  $N$  plakayı etiketler, ve  $n_{ij}^\alpha$  sadece eğer  $\langle ij \rangle$  bağı  $\alpha$  plakasına aitse, sıfırdan farklıdır ve  $n_{ij}$ 'ye eşittir. Kronecker delta'yı üstel gösteriminde yazarsak

$$Z = \sum_{\{n_{ij}\}} e^{-\frac{K}{2} \sum_{\langle ij \rangle} |n_{ij}|^\infty} \prod_{\alpha} \left( \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_\alpha}{2\pi} e^{i\theta_\alpha \sum_{\langle ij \rangle} n_{ij}^\alpha} \right)$$

elde ederiz.

(iii) Her bağı iki komşu plağa ait olduğu için, bağları  $ij$  yerinde  $\alpha\beta$  ile etiketleyebiliriz, ki buradan

$$\begin{aligned} Z &= \left( \prod_{\gamma} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_\gamma}{2\pi} \right) \sum_{\{n_{\alpha\beta}\}} \exp \left( \sum_{\langle \alpha\beta \rangle} \left\{ -\frac{K}{2} |n_{\alpha\beta}|^\infty + i(\theta_\alpha - \theta_\beta) n_{\alpha\beta} \right\} \right) \\ &= \left( \prod_{\gamma} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_\gamma}{2\pi} \right) \prod_{\langle \alpha\beta \rangle} \sum_{n_{\alpha\beta}} \exp \left( \left\{ -\frac{K}{2} |n_{\alpha\beta}|^\infty + i(\theta_\alpha - \theta_\beta) n_{\alpha\beta} \right\} \right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Her plaka aynı yönde geçilirse, komşu plakalardaki kısıtlama değişkenleri  $\theta_\alpha$  ve  $\theta_\beta$  için,  $n_{\alpha\beta}$  zıt yönlerde olur (zıt işaretlerle) olur. Şimdi, serbestçe bağ değişkenleri üzerinden toplayabiliriz, ve

$$\sum_{n=0,+1,-1} \exp\left(-\frac{K}{2}|n| + i(\theta_\alpha - \theta_\beta)n\right) = 1 + 2e^{-\frac{K}{2}} \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta)$$

olduğu için,

$$Z = \left( \prod \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_\gamma}{2\pi} \right) \exp\left( \sum_{\langle\alpha\beta\rangle} \ln \left[ 1 + 2e^{-\frac{K}{2}} \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta) \right] \right)$$

(b) Büyük  $K$  için, eşlek problemin sadece  $XY$  modeli olduğunu gösterin. Bu sonuç, bir önceki problemde renormalizasyon gurubu ile elde edilen sonuçla tutarlı mıdır? (Ayrıca, ilmik modeli ile bağlantıya da dikkat edin.)

- Bu ilmik gazı modelidir, ve büyük  $K$  için,

$$\ln \left[ 1 + 2e^{-\frac{K}{2}} \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta) \right] \approx 2e^{-\frac{K}{2}} \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta)$$

ve

$$Z = \left( \prod_\gamma \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_\gamma}{2\pi} \right) e^{\sum_{\langle\alpha\beta\rangle} 2e^{-\frac{K}{2}} \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta)}$$

Bu ise, eğer

$$K_{XY} = 4e^{-\frac{K}{2}}$$

olarak saptarsak,  $XY$  modelinin bölüşüm fonksiyonundan başka birşey değildir, ki düşük sıcaklık pürüzleşme probleminin  $XY$  modelinin yüksek sıcaklık fazına, ve tersi, karşılık geldiğini bulduğumuz başka bir problemin sonuçlarıyla tutarlıdır.

(c) Bu Hamiltoniyen'in bir boyutlu uyarlamasınının, yani

$$-\beta\mathcal{H} = -\frac{K}{2} \sum_i |h_i - h_{i+1}|^2$$

Hamiltoniyeni ile 2d arayüz, pürüzleşme geçişi var mıdır?

- Tek boyutta, bölüşüm fonksiyonunu doğrudan toplayarak

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{h_i\}} \exp\left(-\frac{K}{2} \sum_i |h_i - h_{i+1}|^\infty\right) = \sum_{\{n_i\}} \exp\left(-\frac{K}{2} \sum_i |n_i|^\infty\right) \\ &= \prod_i \sum_{n_i} \exp\left(-\frac{K}{2} |n_i|^\infty\right) = \prod_i (1 + 2e^{-K/2}) = (1 + 2e^{-K/2})^N \end{aligned}$$

( $n_i = h_i - h_{i+1}$ ) elde ederiz. Böylece elde edilen ifade,  $N \rightarrow \infty$  limitinde,  $K$ 'nın analitik fonksiyonudur ( $0 < K < \infty$  için), ve dolayısıyla, sonlu sıfırdan farklı sıcaklıklarda, faz geçişi yoktur.

\*\*\*\*\*