

MIT Açık Ders Malzemesi
<http://ocw.mit.edu>

8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

Bu malzemeye atıfta bulunmak ve Kullanım Şartlarımızla ilgili bilgi almak için
<http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://tuba.acikders.org.tr> sitelerini ziyaret ediniz.

Tekrar Problemleri & Çözümleri

Test, ‘kapalı kitaptır,’ ancak isterseniz, tek-tarafli formül sayfası getirebilirsiniz. Bu sayfanın amacı, önemli formül ve denklemleri hatırlatmaktır, ve buradaki cevapların kısa yazımı değildir. Bu ayrıcalık kötüye kullanılırsa, ilerideki sınavlarda geri alınacaktır. Test, tamamen aşağıdaki soruların bir alt kümesinden oluşacaktır. Dolayısıyla bu sorularla yakınsanız ve rahatsanız, herhangi bir sürpriz olmayacak!

1. Sıvılarda Ölçeklenme: Sıvı-gaz kritik noktası yakınında, serbest enerjinin $F/N = t^{2-\alpha}g(\delta\rho/t^\beta)$ şeklini aldığı kabul edilir, ki burada $t = |T - T_c|/T_c$ indirgenmiş sıcaklıktır, ve $\delta\rho = \rho - \rho_c$ kritik nokta yoğunluğundan sapmayı ölçer. Herhangi bir $Q(t, \delta\rho)$ termodinamik niceliğinin önde gelen tekilliği, $\rho = \rho_c$ eşyoğunluk üzerinden kritik noktaya yaklaşırken t^x şeklindedir; veya $T = T_c$ eşsıcaklık eğrisi üzerinden bir yol için $\delta\rho^y$ şeklindedir. x ve y üstellerini aşağıdaki nicelikler için bulunuz:

- Herhangi bir termodinamik nicelik $Q(t, \delta\rho)$

$$Q(t, \delta\rho) = t^{x_Q} g_Q \left(\frac{\delta\rho}{t^\beta} \right)$$

ölçeklenme formunda yazılabilir. Dolayısıyla, Q 'nun önde gelen tekil davranışı, $\delta\rho = 0$ ise, yani kritik eşyoğunluk eğrisi üzerinde, t^{x_Q} şeklindedir. Herhangi bir Q için, kritik eşsıcaklık eğrisi üzerinde, $t \rightarrow 0$ iken t 'den bağımsız olması koşulu, ölçekleme fonksiyonunun, argümanı yeterince büyük ise,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_Q(x) = x^{x_Q/\beta}$$

olmasını gerektirir, böylece

$$Q(0, \delta\rho) \propto (\delta\rho)^{y_Q}, \quad y_Q = \frac{x_Q}{\beta} \quad \text{olmak üzere}$$

(a) Parçacık başına iç enerji $\langle H \rangle/N$, ve parçacık başına entropi $s = S/N$.

- Parçacık başına serbest enerjinin

$$f = \frac{F}{N} = t^{2-\alpha} g \left(\frac{\delta\rho}{t^\beta} \right)$$

ve $T < T_c$ olduğunu varsayalım, dolayısıyla $\frac{\partial}{\partial T} = -\frac{1}{T_c} \frac{\partial}{\partial t}$. Buradan, entropi

$$s = - \left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_V = \frac{1}{T_c} \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_\rho = \frac{t^{1-\alpha}}{T_c} g_S \left(\frac{\delta\rho}{t^\beta} \right)$$

olarak verilir, böylece $x_S = 1 - \alpha$ ve $y_S = (1 - \alpha)/\beta$. İç enerji için,

$$f = \frac{\langle \mathcal{H} \rangle}{N} - Ts, \quad \text{veya} \quad \frac{\langle \mathcal{H} \rangle}{N} \sim T_c s (1 + t) \sim t^{1-\alpha} g_{\mathcal{H}} \left(\frac{\delta\rho}{t^\beta} \right)$$

dolayısıyla $x_{\mathcal{H}} = 1 - \alpha$ ve $y_{\mathcal{H}} = (1 - \alpha)/\beta$.

(b) $C_V = T\partial s/\partial|_V$ ve $C_P = T\partial s/\partial T|_P$ ısı sığaları.

- Sabit hacimdeki ısı sığası

$$C_V = T \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_V = - \frac{\partial s}{\partial t} \Big|_{\rho} = \frac{t^{-\alpha}}{T_c} g_{C_V} \left(\frac{\delta\rho}{t^\beta} \right)$$

Sabit hacimde ısı sığasını hesaplamak için, ilk önce sabit P 'de $\delta\rho(t)$ bağıntısını belirlememiz gerekir. Bu amaçla,

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} \Big|_P = - \frac{\frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{\rho}}{\frac{\partial P}{\partial\delta\rho} \Big|_t}$$

termodinamik özdeşliğini kullanacağız. P basıncı

$$P = - \frac{\partial F}{\partial V} = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial\delta\rho} \sim \rho_c t^{2-\alpha-\beta} g_P \left(\frac{\delta\rho}{t^\beta} \right)$$

olarak belirlenir, ki $\delta\rho \ll t^\beta$ için

$$P \propto t^{2-\alpha-\beta} \left(1 + A \frac{\delta\rho}{t^\beta} \right), \quad \text{dolayısıyla} \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{\rho} \propto t^{1-\alpha-\beta} \\ \frac{\partial P}{\partial\delta\rho} \Big|_t \propto t^{2-\alpha-2\beta} \end{cases}$$

olarak davranır. Diğer uç durumda $\delta\rho \gg t^\beta$,

$$P \propto \delta\rho^{(2-\alpha-\beta)/\beta} \left(1 + B \frac{t}{\delta\rho^{1/\beta}} \right), \quad \text{ve} \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{\rho} \propto \delta\rho^{(1-\alpha-\beta)/\beta} \\ \frac{\partial P}{\partial\delta\rho} \Big|_t \propto \delta\rho^{(2-\alpha-2\beta)/\beta} \end{cases}$$

burada, yeniden, P 'nin $\delta\rho \rightarrow 0$ iken $\delta\rho$ 'ya, ve $t \rightarrow 0$ iken t 'ye bağlı olmamasını şart koştuk.

Önceki sonuçlardan, şimdi

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} \Big|_P \propto \begin{cases} t^{\beta-1} & \implies \delta\rho \propto t^\beta \\ \delta\rho^{(\beta-1)/\beta} & \implies t \propto \delta\rho^{1/\beta} \end{cases}$$

olarak belirleyebiliriz. Bu bağıntıların herhangi birinden $\delta\rho \propto t^\beta$ olarak elde ederiz, ve dolayısıyla entropi $s \propto t^{1-\alpha}$. Sabit basınçtaki ısı sığası

$$C_P \propto t^{-\alpha}, \quad x_{C_P} = -\alpha \quad \text{ve} \quad y_{C_P} = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ile}$$

(c) Eşsıcaklık sıkıştırılabilirliği $\kappa_T = \partial\rho/\partial P|_T/\rho$, ve termal esnema katsayısı $\alpha = \partial V/\partial T|_P/V$.

(b) ve (c) kısımlarında elde ettiğiniz sonuçların $C_P - C_V = TV\alpha^2/\kappa_T$ termodinamik özdeşliği ile tutarlı olduğunu kontrol ediniz.

- Eşsıcaklık sıkıştırılabilirliği ve termal genişleme katsayıları, önceden elde edilen bağıntılardan

bazılarını kullanarak hesaplanabilir:

$$\kappa_T = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T = \frac{1}{\rho_c} \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_T^{-1} = \frac{1}{\rho_c^3} t^{\alpha+2\beta-2} g_\kappa \left(\frac{\delta \rho}{t^\beta} \right)$$

burada $x_\kappa = \alpha + 2\beta - 2$, ve $y_\kappa = (\alpha + 2\beta - 2)/\beta$. Ve

$$\alpha = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P = \frac{1}{\rho T_c} \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_P \propto t^{\beta-1}$$

burada $x_\alpha = \beta - 1$ ve $y_\alpha = (\beta - 1)/\beta$. Dolayısıyla, açıkça, bu sonuçlar termodinamik özdeşlikle uyumludur:

$$(C_P - C_V)(t, 0) \propto t^{-\alpha}, \quad \text{veya} \quad (C_P - C_V)(0, \delta \rho) \propto \delta \rho^{-\alpha/\beta}$$

ve

$$\frac{\alpha^2}{\kappa_T}(t, 0) \propto t^{-\alpha}, \quad \text{veya} \quad \frac{\alpha^2}{\kappa_T}(0, \delta \rho) \propto \delta \rho^{-\alpha/\beta}$$

(d) $T < T_c$ için, beraber varolma eğrisi boyunca, erime ısısının davranışını kabaca çizin, ve t 'nin fonksiyonu olarak tekilliğini bulun.

- Erime ısısı

$$L = T(s_+ - s_-)$$

beraber varolma eğrisi boyunca tanımlıdır, ve daha önce gördüğümüz gibi

$$T s_\pm = t^{1-\alpha} g_s \left(\frac{\delta \rho_\pm}{t^\beta} \right)$$

Beraber var olan iki fazdaki yoğunluk farkı, düzen parametresidir, ve t^β gibi yok olur, tıpkı gaz ve sıvı yoğunluklarının kritik değerlerinden sapmaları $\delta \rho_+ = \rho_c - 1/v_+$ ve $\delta \rho_- = \rho_c - 1/v_-$ gibi. (Daha doğrusu, (b)'de gördüğümüz gibi, $\delta \rho_P = \text{sabit} \propto t^\beta$.) Dolayısıyla, yukarıdaki ifadedeki g 'nin argümanı sonlu bir değerde hesaplanır, ve erime ısısı kritik noktaya yaklaşırken sıfıra gittiği için,

$$L \propto t^{1-\alpha}, \quad x_L = 1 - \alpha \quad \text{ile}$$

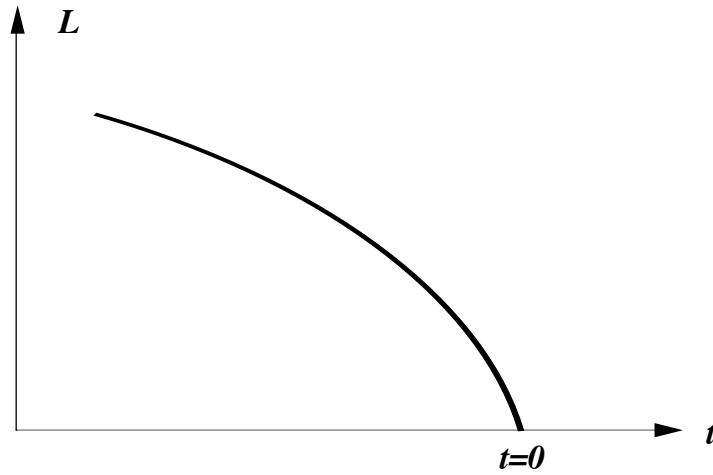
2. İsing Modeli: $d = 1 + \epsilon$ boyutundaki İsing modelinin, T sıcaklığı ve h manyetik alanı için, differansiyel yineleme bağıntıları

$$\begin{cases} \frac{dT}{d\ell} = -\epsilon T + \frac{T^2}{2} \\ \frac{dh}{d\ell} = dh \end{cases}$$

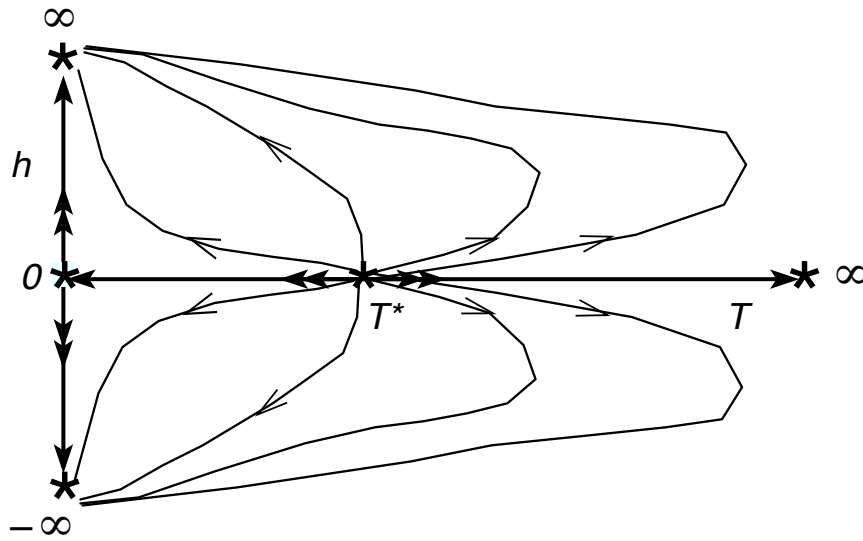
olarak verilir.

(a) Renormalizasyon gurubu akışlarını (T, h) düzleminde kabaca çizin ($\epsilon > 0$ için), $h = 0$ eksenini boyunca, sabit noktaları işaretleyin.

- Akışın sabit noktaları, RG altında kendine giden, $h = 0$ eksenini üzerinde olur. Bu eksen



üzerinde, üç sabit nokta vardır: **(i)** $T^* = 0$, düşük sıcaklık fazı için kararlı giderdir. **(ii)** $T^* \rightarrow \infty$, yüksek sıcaklık için kararlı giderdir. **(iii)** $(T^* = 2\epsilon, h^* = 0)$ 'da kararsız olan kritik sabit nokta vardır. Bütün sabit noktalar, alan yönünde kararsızdır.



(b) Kritik sabit noktada, y_t ve y_h özdeğerlerini, ϵ mertebesine kadar hesaplayın

• $T = T^* + \delta T$ 'yi kritik nokta etrafında doğrusallaştırmak,

$$\begin{cases} \frac{d\delta T}{d\ell} = -\epsilon\delta T + T^*\delta T = \epsilon\delta T \\ \frac{dh}{d\ell} = (1 + \epsilon)h \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_t = +\epsilon \\ y_h = 1 + \epsilon \end{cases}$$

verir.

(c) Renormalizasyon altında ξ bağdaşıklık uzunluğunun değişimini belirleyen denklemden başlayarak, $\xi(t, h) = t^{-\nu} g_\xi(h/|t|^\Delta)$ (burada $t = T/T_c - 1$) olduğunu gösterin, ve ν ve Δ üstellerini bulun.

- b çarpanı ile ölçekleme altında, bağdaşıklık uzunluğu b kadar azalır, ve

$$\xi(t, h) = b\xi(b^{y_t}t, b^{y_h}h)$$

homojenlik bağıntısı elde edilir. $b^{y_t}t \sim 1$ şeklinde bir ölçeklenme çarpanı seçince,

$$\xi(t, h) = t^{-\nu} g_\xi(h/|t|^\Delta)$$

elde ederiz, burada

$$\nu = \frac{1}{y_t} = \frac{1}{\epsilon}, \quad \text{ve} \quad \Delta = \frac{y_h}{y_t} = \frac{1}{\epsilon} + 1$$

(d) Hiperölçekleme bağıntılarını, serbest enerjinin tekil kısmını bulmak $f_{\text{tek.}}(t, h)$, ve dolayısıyla ısı sığası üstelini, için kullanın.

- Hiperölçeklemeye göre,

$$f_{\text{tek.}}(t, h) \propto \xi(t, h)^{-d} = t^{d/y_t} g_f(h/|t|^\Delta)$$

t 'ye göre iki defa türev almak, ısı sığasını verir, ısı sığasının $h = 0$ 'daki tekilliği

$$\alpha = 2 - d\nu = 2 - \frac{1 + \epsilon}{\epsilon} = -\frac{1}{\epsilon} + 1$$

üsteli ile tarif edilir.

(e) Mıknatıslanma ve alınganlığın tekil davranışları için, sırasıyla, β ve γ üstellerini bulun.

- Mıknatıslanma, serbest enerjiden

$$m = - \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{h=0} \sim |t|^\beta, \quad \beta = \frac{d - y_h}{y_t} = 0 \quad \text{olmak üzere}$$

şeklinde elde edilir. (ϵ 'da daha yüksek mertebelerde, β 'ya düzeltmeler olacaktır.) Alınganlık, mıknatıslanmanın türevinden elde edilir, veya

$$\chi = - \left. \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \right|_{h=0} \sim |t|^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{2y_h - d}{y_t} = \frac{1 + \epsilon}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} + 1 \quad \text{olmak üzere}$$

(f) Alınganlık ve yerel mıknatıslanmaların bağdaşıklıkları arasındaki bağıntıdan başlayarak, kritik bağdaşıklıklar ($\langle m(\mathbf{0})m(\mathbf{x}) \rangle \sim |\mathbf{x}|^{-(d-2+\eta)}$) için η üstelini hesaplayın.

- Manyetik alınganlık, bağlantılı bağdaşıklık fonksiyonlarına

$$\chi = \int d^d \mathbf{x} \langle m(\mathbf{0})m(\mathbf{x}) \rangle_c$$

ile bağlıdır. Kritikliğin yakınında, bağdaşıklık fonksiyonları kuvvet yasası şeklinde azalır $\langle m(\mathbf{0})m(\mathbf{x}) \rangle \sim |\mathbf{x}|^{-(d-2+\eta)}$, ki bağdaşıklık uzunluğu ile sınırlıdır, buradan

$$\chi \sim \xi^{(2-\eta)} \sim |t|^{-(2-\eta)\nu}$$

elde ederiz. Karşılık gelen üstel özdeşlikten,

$$\gamma = (2 - \eta)\nu, \quad \implies \quad \eta = 2 - y_t\gamma = 2 - 2y_h + d = 2 - d = 1 - \epsilon$$

olarak buluruz.

(g) $d = 1$ 'de, $T \rightarrow 0$ iken ($h = 0$ boyunca), bağdaşıklık nasıl ıraksar?

• $d = 1$ 'de sıcaklık için olan yineleme bağıntısı düzenlenerek integrali alınabilir, yani

$$\frac{1}{T^2} \frac{dT}{d\ell} = \frac{1}{2}, \quad \implies \quad d\left(-\frac{2}{T}\right) = d\ell$$

Yukarıdaki ifadeyi, bağdaşlık uzunluğu $\xi(T)$ olan düşük sıcaklıktan, bağdaşlık uzunluğunun ağ aralığında olduğu ve $1/T \approx 0$ olan yüksek sıcaklığa kadar integralini alarak

$$-\frac{2}{T} = \ln\left(\frac{\xi}{a}\right) \quad \implies \quad \xi(T) = a \exp\left(\frac{2}{T}\right)$$

elde ederiz.

3. Boyuna Alınganlık: Ortalama alan düzeyinde, boyuna alınganlığın ıraksaması için hiçbir sebep yokken, gerçekte, $d < 4$ boyutlarında salınımlardan dolayı ıraksar. Bu problemde, bu ıraksamanın tedirgeme kuramındaki kaynağını göstermek amaçlanmıştır. Aslında, bu hesaptaki değişik adımlarda, ihmal etmeniz söylenen bazı incelikler vardır. Niye geçerli olduklarını düşünmek isteyebilirsiniz.

n bileşenli bir mıknaatıslanma vektörünü $\vec{m}(\mathbf{x})$ tasvir eden Landau-Ginzburg Hamiltoniyenini

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x} \left[\frac{K}{2} (\nabla\vec{m})^2 + \frac{t}{2} \vec{m}^2 + u(\vec{m}^2)^2 \right]$$

$t < 0$ için düzenli fazda ele alalım.

(a) $\vec{m}(\mathbf{x}) = (\bar{m} + \phi_b(\mathbf{x}))\hat{e}_b + \vec{\phi}_e(\mathbf{x})\hat{e}_e$ olsun, ve $\beta\mathcal{H}$ 'yi açılımdaki bütün terimleri tutarak açalım.

• $\vec{m}(\mathbf{x}) = (\bar{m} + \phi_b(\mathbf{x}))\hat{e}_b + \vec{\phi}_e(\mathbf{x})\hat{e}_e$ ve \bar{m} , $\beta\mathcal{H}$ 'in en küçük olduğu nokta olmak üzere,

$$\begin{aligned} \beta\mathcal{H} = & V \left(\frac{t}{2} \bar{m}^2 + u\bar{m}^4 \right) + \int d^d\mathbf{x} \left\{ \frac{K}{2} \left[(\nabla\phi_b)^2 + (\nabla\vec{\phi}_e)^2 \right] + \left(\frac{t}{2} + 6u\bar{m}^2 \right) \phi_b^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{t}{2} + 2u\bar{m}^2 \right) \vec{\phi}_e^2 + 4u\bar{m} \left(\phi_b^3 + \phi_b\vec{\phi}_e^2 \right) + u \left[\phi_b^4 + 2\phi_b\vec{\phi}_e^2 + (\vec{\phi}_e^2)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

Düzenli fazda ($t < 0$), $\bar{m}^2 = -t/4u$ olduğu için, bu ifade sadeleştirilebilir, ve sabit terimi attıktan sonra

$$\begin{aligned} \beta\mathcal{H} = & \int d^d\mathbf{x} \left\{ \frac{K}{2} \left[(\nabla\phi_b)^2 + (\nabla\vec{\phi}_e)^2 \right] - t\phi_b^2 + 4u\bar{m} \left(\phi_b^3 + \phi_b\vec{\phi}_e^2 \right) \right. \\ & \left. + u \left[\phi_b^4 + 2\phi_b\vec{\phi}_e^2 + (\vec{\phi}_e^2)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

(b) ϕ_b ve $\vec{\phi}_e$ 'de ikinci derece terimleri, tedirgenmemiş Hamiltoniyen $\beta\mathcal{H}_0$ olarak alalım, ve ϕ_b ile

$\vec{\phi}_e$ 'yi birbirine çiftleyen en düşük mertebe terimi de U tedirgemesi olarak, yani

$$U = 4u\bar{m} \int d^d \mathbf{x} \phi_b(\mathbf{x}) \vec{\phi}_e(\mathbf{x})^2$$

U 'yu Fourier uzayında, $\phi_b(\mathbf{q})$, ve $\vec{\phi}_e(\mathbf{q})$ cinsinden yazın.

- Tedirgeme olarak üçlü terime odaklanalım:

$$U = 4u\bar{m} \int d^d x \phi_b(\mathbf{x}) \vec{\phi}_e(\mathbf{x})^2$$

ki Fourier uzayında

$$U = 4u\bar{m} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \phi_b(-\mathbf{q} - \mathbf{q}') \vec{\phi}_e(\mathbf{q}) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}')$$

(c)Gaussiyan (çıplak) $\langle \phi_b(\mathbf{q}) \phi_b(\mathbf{q}') \rangle_0$ ve $\langle \phi_{e,\alpha}(\mathbf{q}) \phi_{e,\beta}(\mathbf{q}') \rangle_0$ beklenen değerlerini, ve karşılık gelen, momentum bağımlı $\chi_b(\mathbf{q})_0$ ve $\chi_e(\mathbf{q})_0$ alınganlıklarını hesaplayın.

- Hamiltoniyenin ikinci derece kısmından

$$\beta \mathcal{H}_0 = \int d^d x \frac{1}{2} \left\{ K \left[(\nabla \phi_b)^2 + (\nabla \vec{\phi}_e)^2 \right] - 2t \phi_b^2 \right\}$$

beklenen değerleri

$$\begin{cases} \langle \phi_b(\mathbf{q}) \phi_b(\mathbf{q}') \rangle_0 = \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{Kq^2 - 2t} \\ \langle \phi_{e,\alpha}(\mathbf{q}) \phi_{e,\beta}(\mathbf{q}') \rangle_0 = \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \delta_{\alpha\beta}}{Kq^2} \end{cases}$$

olarak ve karşılık gelen alınganlıkları

$$\begin{cases} \chi_b(\mathbf{q})_0 = \frac{1}{Kq^2 - 2t} \\ \chi_e(\mathbf{q})_0 = \frac{1}{Kq^2} \end{cases}$$

olarak okunur.

(d) $\langle \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_2) \vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_2) \rangle_0$ 'i Wick kuramı kullanarak hesaplayın. ($\vec{\phi}_e$ 'nin $(n-1)$ bileşenli bir vektör olduğunu unutmayın)

- Wick kuramını kullanarak

$$\begin{aligned} \langle \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_2) \vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_2) \rangle_0 &\equiv \langle \phi_{e,\alpha}(\mathbf{q}_1) \phi_{e,\alpha}(\mathbf{q}_2) \phi_{e,\beta}(\mathbf{q}'_1) \phi_{e,\beta}(\mathbf{q}'_2) \rangle_0 \\ &= \langle \phi_{e,\alpha}(\mathbf{q}_1) \phi_{e,\alpha}(\mathbf{q}_2) \rangle_0 \langle \phi_{e,\beta}(\mathbf{q}'_1) \phi_{e,\beta}(\mathbf{q}'_2) \rangle_0 + \langle \phi_{e,\alpha}(\mathbf{q}_1) \phi_{e,\beta}(\mathbf{q}'_1) \rangle_0 \langle \phi_{e,\alpha}(\mathbf{q}_2) \phi_{e,\beta}(\mathbf{q}'_2) \rangle_0 \\ &\quad + \langle \phi_{e,\alpha}(\mathbf{q}_1) \phi_{e,\beta}(\mathbf{q}'_2) \rangle_0 \langle \phi_{e,\alpha}(\mathbf{q}_2) \phi_{e,\beta}(\mathbf{q}'_1) \rangle_0 \end{aligned}$$

Ondan sonra, (c) kısmından, ve $\delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\beta} = (n-1)^2$ ve $\delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = (n-1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_2) \vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_2) \rangle_0 &= \frac{(2\pi)^{2d}}{K^2} \left\{ (n-1)^2 \frac{\delta^d(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta^d(\mathbf{q}'_1 + \mathbf{q}'_2)}{q_1^2 q_1'^2} \right. \\ &\quad \left. + (n-1) \frac{\delta^d(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}'_1) \delta^d(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}'_2)}{q_1^2 q_2^2} + (n-1) \frac{\delta^d(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}'_2) \delta^d(\mathbf{q}'_1 + \mathbf{q}_2)}{q_1^2 q_2^2} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

(e) $\langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}') \rangle$ ifadesini, U tedirgemesinde ikinci dereceye kadar yazın. U , ϕ_b 'da tek olduğu için, ikinci mertebede sadece iki terim sıfırdan farklıdır.

• Bağdaşıklık fonksiyonunun hesabında U tedirgemisini dahil edersek,

$$\langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}') \rangle = \frac{\langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}')e^{-U} \rangle_0}{\langle e^{-U} \rangle_0} = \frac{\phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}')(1 - U + U^2/2 + \dots)}{\langle (1 - U + U^2/2 + \dots) \rangle_0}$$

U , ϕ_b 'de tek olduğu için, $\langle U \rangle_0 = \langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}')U \rangle_0 = 0$. Dolayısıyla paydayı ikinci mertebeye kadar açınca

$$\frac{1}{1 + \langle U^2/2 \rangle_0 + \dots} = 1 - \left\langle \frac{U^2}{2} \right\rangle_0 + \mathcal{O}(U^3)$$

$$\langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}') \rangle = \langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}') \rangle_0 + \frac{1}{2}(\langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}')U^2 \rangle_0 - \langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}') \rangle_0 \langle U^2 \rangle_0)$$

elde ederiz.

(f) U 'nın fourier modundaki ifadesini kullanarak, düzeltme terimini, (d) kısmındaki benzer, iki tane 4-nokta beklenen değerinin çarpımı olarak yazın. Sadece boylamsal 4-nokta fonksiyonunun bağlantılı terimlerinin hesaplanması gerektiğine dikkat edin.

• U yerine, (b) kısmındaki Fourier dönüşümünü kullanırsak, bağdaşıklık fonksiyonuna salınımlardan gelen düzeltme

$$\begin{aligned} G_F(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &\equiv \langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}') \rangle - \langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}') \rangle_0 \\ &= \frac{1}{2}(4u\bar{m})^2 \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d q'_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d q'_2}{(2\pi)^d} \left\langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}')\phi_b(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)\vec{\phi}_e(\mathbf{q}_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_2) \right. \\ &\quad \left. \times \phi_b(-\mathbf{q}'_1 - \mathbf{q}'_2)\vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_2) \right\rangle_0 - \frac{1}{2}\langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}') \rangle_0 \langle U^2 \rangle_0 \end{aligned}$$

yani $G_F(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(4u\bar{m})^2 \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d q'_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d q'_2}{(2\pi)^d} \left\langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}')\phi_b(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)\vec{\phi}_e(\mathbf{q}_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_2) \right\rangle_0 \\ \times \left\langle \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_2)\vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_2) \right\rangle_0 \end{aligned}$$

ifadesinin bağlantılı kısmı olarak hesaplanır, burada, tedirgenmemiş, boylamsal ve dikine alanların çarpımlarının çarpanlarına ayrıldığı gerçeğini kullandık. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} G_F(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &= \frac{1}{2}(4u\bar{m})^2 \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d q'_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d q'_2}{(2\pi)^d} \left\langle \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_2)\vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_2) \right\rangle_0 \\ &\quad \times \{ \langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \rangle_0 \langle \phi_b(\mathbf{q}')\phi_b(-\mathbf{q}'_1 - \mathbf{q}'_2) \rangle_0 \\ &\quad + \langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(-\mathbf{q}'_1 - \mathbf{q}'_2) \rangle_0 \langle \phi_b(\mathbf{q}')\phi_b(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \rangle_0 \} \\ &= 2 \times \frac{1}{2}(4u\bar{m})^2 \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d q'_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d q'_2}{(2\pi)^d} \left\langle \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}_2)\vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_1) \cdot \vec{\phi}_e(\mathbf{q}'_2) \right\rangle_0 \\ &\quad \times \langle \phi_b(\mathbf{q})\phi_b(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \rangle_0 \langle \phi_b(\mathbf{q}')\phi_b(-\mathbf{q}'_1 - \mathbf{q}'_2) \rangle_0 \end{aligned}$$

(c) ve (d) kısımlarının iki ve üç nokta bağdaşıklık fonksiyonu sonuçlarını kullanarak, ve $u^2\bar{m}^2 =$

$-ut/4$ olduğu için,

$$G_F(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = 4u(-t) \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d q'_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d q'_2}{(2\pi)^d} \frac{(2\pi)^{2d}}{K^2} \left\{ (n-1)^2 \frac{\delta^d(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta^d(\mathbf{q}'_1 + \mathbf{q}'_2)}{q_1^2 q_1'^2} \right. \\ \left. + (n-1) \frac{\delta^d(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}'_1) \delta^d(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}'_2) + \delta^d(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}'_2) \delta^d(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}'_1)}{q_1^2 q_2^2} \right\} \\ \times \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{Kq^2 - 2t} \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'_1 - \mathbf{q}'_2)}{Kq'^2 - 2t}$$

ki, bazı integralleri aldıktan sonra,

$$G_F(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{4u(-t)}{K^2} \left\{ (n-1)^2 \frac{\delta^d(\mathbf{q}) \delta^d(\mathbf{q}')}{4t^2} \left(\int \frac{d^d q_1}{q_1^2} \right)^2 \right. \\ \left. + 2(n-1) \frac{\delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{(Kq^2 - 2t)^2} \int \frac{d^d q_1}{q_1^2 (\mathbf{q} + \mathbf{q}_1)^2} \right\}$$

ifadesine indirgenir.

(g) (d)'de elde edilen bağlantısız terimi ihmal edin (yani $(n-1)^2$ ile orantılı kısmı), ve $\chi_b(\mathbf{q})$ için tedirgemede ikinci mertebeden bir ifade yazın.

• İlk terimin $(\delta^d(\mathbf{q}) \delta^d(\mathbf{q}'))$ ile orantılı olan) bağımlılığından, bu terimin gerçekte, mıknatıslanmanın tedirgenmemiş değerine bir düzeltme olduğunu çıkarırız, yani

$$\bar{m} \rightarrow \bar{m} \left[1 - \frac{2(n-1)u}{Kt} \left(\int \frac{d^d q_1}{q_1^2} \right) \right]$$

ve sıfırdan farklı aralıklarda, bağdaşıklık fonksiyonuna katkı vermez. Dolayısıyla, bağlantılı bağdaşıklık fonksiyonunun uzamsal değişen kısmı

$$\langle \phi_b(\mathbf{q}) \phi_b(\mathbf{q}') \rangle = \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{Kq^2 - 2t} + \frac{8u(-t)}{K^2} (n-1) \frac{\delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{(Kq^2 - 2t)^2} \int \frac{d^d q_1}{q_1^2 (\mathbf{q} + \mathbf{q}_1)^2}$$

olur, ve buradan

$$\chi_b(\mathbf{q}) = \frac{1}{Kq^2 - 2t} + \frac{8u(-t)}{K^2} \frac{(n-1)}{(Kq^2 - 2t)^2} \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d q_1^2 (\mathbf{q} + \mathbf{q}_1)^2}$$

elde edilir.

(h) $d < 4$ için, düzeltme teriminin $q \rightarrow 0$ için q^{d-4} olarak ıraksadığını gösterin, ki bu sonsuz boylamsal alınganlık anlamına gelir.

• $d > 4$ 'te, yukarıdaki integral yakınsar ve büyük q sınırı ile belirlenir. Diğer taraftan, $d < 4$ 'te integral $q \rightarrow 0$ iken ıraksar, ve dolayısıyla küçük q_1 değerleri tarafından belirlenir. İntegral değişkenini $\hat{\mathbf{q}}'_1 = \mathbf{q}_1/q'$ ya değiştirirsek, alınganlığa salınımlardan gelen düzeltmeler

$$\chi_b(\mathbf{q})_S \sim q^{d-4} \int_0^{\Lambda/q} \frac{d^d \hat{\mathbf{q}}'_1}{(2\pi)^d q_1'^2 (\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{q}}'_1)^2} = q^{d-4} \int_0^\infty \frac{d^d \hat{\mathbf{q}}'_1}{(2\pi)^d q_1'^2 (\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{q}}'_1)^2} + \mathcal{O}(q^0)$$

olur ki $q \rightarrow 0$ iken q^{d-4} olarak ıraksar.

NOT: Öteleme simetrisi olan bir sistemde

$$\langle \phi(\mathbf{q})\phi(\mathbf{q}') \rangle = \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

ki

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{q})\phi(\mathbf{q}') \rangle &= \int d^d x d^d x' e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{x}'} \langle \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}') \rangle \\ &= \int d^d(x - x') d^d x' e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + i(\mathbf{q} + \mathbf{q}')\cdot\mathbf{x}'} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \psi(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

anlamına gelir.

$$-\beta\mathcal{H}' = -\beta\mathcal{H} + \int d^d x h(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) = -\beta\mathcal{H} + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} h(\mathbf{q})\phi(-\mathbf{q})$$

Hamiltoniyenini düşünün, burada $-\beta\mathcal{H}$, ϕ 'nin (basitleştirmek için tek bileşenli bir alan) öteleme değişmez bir fonksiyoneldir. Elimizde

$$m(\mathbf{x} = \mathbf{0}) = \langle \phi(\mathbf{0}) \rangle = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \langle \phi(\mathbf{q}) \rangle$$

var, ve bir defa türevini alırsak

$$\frac{\partial m}{\partial h(\mathbf{q})} = \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \langle \phi(\mathbf{q}')\phi(\mathbf{q}) \rangle.$$

$h = 0$ 'da sistemin öteleme simetrisi vardır, ve

$$\left. \frac{\partial m}{\partial h(\mathbf{q})} \right|_{h=0} = \psi(\mathbf{q}).$$

Ayrıca, düzgün bir harici alan için, sistem öteleme değişmezdir, ve

$$-\beta\mathcal{H}' = -\beta\mathcal{H} + h \int d^d x \phi(\mathbf{x}) = -\beta\mathcal{H} + h\phi(\mathbf{q} = \mathbf{0})$$

ki

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial h} = \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \langle \phi(\mathbf{q}')\phi(\mathbf{q} = \mathbf{0}) \rangle = \psi(\mathbf{0})$$

verir.

4. Kristal Eşyönsüzlük: Dörtgenel kristal yapıları bir ferromanyet düşünelim. Spinlerin alttaki ağ ile olan çiftlenmesi, tam dönme simetrisini yok edebilir. Elde edilen eşyönsüzlükler, Landau-

Ginzburg Hamiltoniyenini değiştirerek tasvir edilebilir:

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x} \left[\frac{K}{2}(\nabla\vec{m})^2 + \frac{t}{2}\vec{m}^2 + u(\vec{m}^2)^2 + \frac{r}{2}m_1^2 + vm_1^2\vec{m}^2 \right]$$

burada $\vec{m} \equiv (m_1, \dots, m_n)$, ve $\vec{m}^2 = \sum_{i=1}^n m_i^2$ 'dir (üç boyuttaki mıknatıslar için $d = n = 3$)

(a) Sabit $|\vec{m}|$ genliği için; $r > 0$ ve $r < 0$ için, n boyutlu mıknatıslanma uzayında hangi yönler seçilmiştir.

• $r > 0$, 1 yönünde düzenlenmeyi engeller, ve kalan $n - 1$ doğrultu boyunca düzenlenmeyi teşvik eder.

$r < 0$, 1 yönü boyunca düzenlenmeyi teşvik eder.

(b) Semer noktası yaklaşımını kullanarak, düzgün şekilde, 1 yönüne *parallel* ve *dik* mıknatıslanmış fazlar için serbest enerjileri ($\ln Z$) hesaplayın.

• $\vec{m}(\mathbf{x}) = m\hat{e}_1$ için, semer noktası yaklaşımında,

$$\ln Z_{sn} = -V \min \left[\frac{t+r}{2}m^2 + um^4 \right]_m$$

elde ederiz, burada $V = \int d^d\mathbf{x}$ sistemin hacmidir. En küçük değer,

$$(t+r)\bar{m} + 4u\bar{m}^3 = 0, \quad \Rightarrow \quad \bar{m} = \begin{cases} 0 & t+r > 0 \text{ için} \\ \sqrt{-(t+r)/4u} & t+r < 0 \text{ için} \end{cases}$$

için elde edilir. $t+r < 0$ için, serbest enerji

$$f_{sn} = -\frac{\ln Z_{sn}}{V} = -\frac{(t+r)^2}{16u}$$

olarak verilir. Mıknatıslanma 1 yönüne dikse, yani $\vec{m}(\mathbf{x}) = m\hat{e}_i$, $i \neq 1$, karşılık gelen ifadeler

$$\ln Z_{sn} = -V \min \left[\frac{t}{2}m^2 + um^4 \right]_m, \quad t\bar{m} + 4u\bar{m}^3 = 0, \quad \bar{m} = \begin{cases} 0 & t > 0 \text{ için} \\ \sqrt{-t/4u} & t < 0 \text{ için} \end{cases}$$

ve $t < 0$ için serbest enerji

$$f_{sn} = -\frac{t^2}{16u}$$

olur.

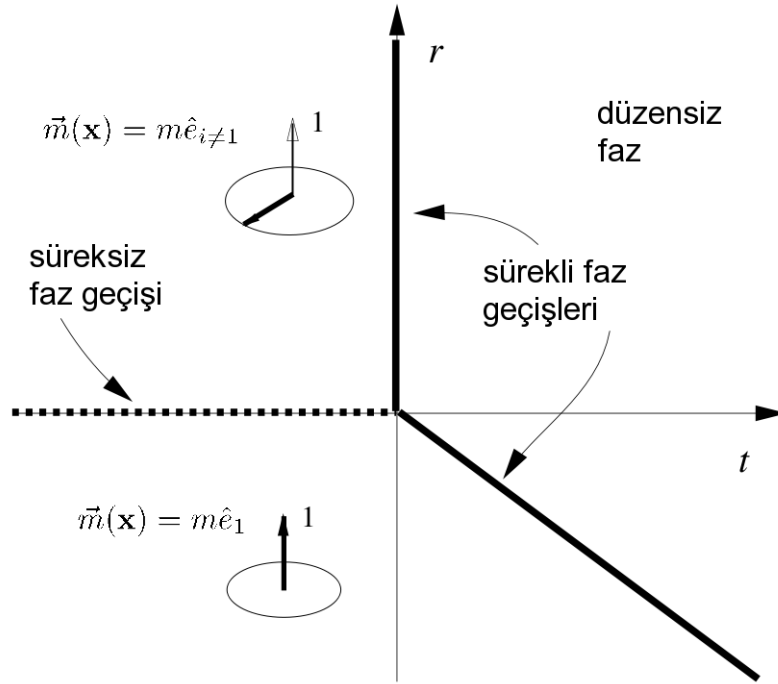
(c) Faz diyagramını (t, r) düzleminde kabataslak çizin, ve fazları (derece türü) ve doğasını (sürekli veya süreksiz) işaretleyin.

• Semer noktası faz diyagramı aşağıdaki şekilde kabaca çizilmiştir.

(d) Düzenli fazda, Goldstone modları var mıdır?

• 1 doğrultusunda hizalanmış mıknatıslanması olan fazda Goldstone modları yoktur, çünkü bu durumda kırılan simetri kesiklidir. Ancak, mıknatıslanmanın 1 doğrultusuna dik olduğu fazda, $(n - 2)$ tane Goldstone modu vardır.

(e) $u = 0$, ve pozitif t ve r için, tedirgenmemiş $\langle m_1(\mathbf{q})m_1(\mathbf{q}') \rangle_0$ ve $\langle m_2(\mathbf{q})m_2(\mathbf{q}') \rangle_0$ ortalamalarını hesaplayın, burada $m_i(\mathbf{q})$, $m_i(\mathbf{x})$ 'in Fourier dönüşümünü gösterir.



- Hamiltoniyeenin Gaussiyen kısmı,

$$\beta \mathcal{H}_0 = \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \left[\frac{K}{2} q^2 |\vec{m}(\mathbf{q})|^2 + \frac{t+r}{2} |m_1(\mathbf{q})|^2 + \sum_{i=2}^n \frac{t}{2} |m_i(\mathbf{q})|^2 \right]$$

olarak Fourier modlarına ayrıştırılabilir. Bu şekilden, eşdeğişkiler kolayca

$$\begin{cases} \langle m_1(\mathbf{q}) m_1(\mathbf{q}') \rangle_0 = \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{t+r+Kq^2} \\ \langle m_2(\mathbf{q}) m_2(\mathbf{q}') \rangle_0 = \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{t+Kq^2} \end{cases}$$

olarak okunur.

(f) Dördüncü derece terimi $\mathcal{U} \equiv u \int d^d \mathbf{x} (\vec{m}^2)^2$, $m_i(\mathbf{q})$ Fourier modları cinsinden yazın.

- $m_i(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) m_i(\mathbf{q})$ ifadesini dördüncü derece terimde yerleştirip, x üzerinden integralini almak

$$\mathcal{U} = u \int d^d \mathbf{x} (\vec{m}^2)^2 = u \int \frac{d^d q_1 d^d q_2 d^d q_3}{(2\pi)^{3d}} \sum_{i,j=1}^n m_i(\mathbf{q}_1) m_i(\mathbf{q}_2) m_j(\mathbf{q}_3) m_j(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3)$$

verir.

(g) \mathcal{U} 'yu bir tedirgeme olarak alarak, $\langle m_1(\mathbf{q}) m_1(\mathbf{q}') \rangle$ 'a *birinci derece* düzeltmeyi hesaplayın. (Cevabınızı bazı integraller şeklinde bırakabilirsiniz.)

- Tedirgemenin ilk mertebesinde, $\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle_0 - (\langle \mathcal{O} \mathcal{U} \rangle_0 - \langle \mathcal{O} \rangle_0 \langle \mathcal{U} \rangle_0)$, ve dolayısıyla

$$\langle m_1(\mathbf{q}) m_1(\mathbf{q}') \rangle = \langle m_1(\mathbf{q}) m_1(\mathbf{q}') \rangle_0 - u \int \frac{d^d q_1 d^d q_2 d^d q_3}{(2\pi)^{3d}} \sum_{i,j=1}^n$$

$$= \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{t + r + Kq^2} \left\{ 1 - \frac{u}{t + r + Kq^2} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{4(n-1)}{t + Kk^2} + \frac{4}{t + r + Kk^2} + \frac{8}{t + r + Kk^2} \right] \right\}$$

Son sonuç, bütün olası eşleştirmeleri, kaç tanesinin $m_{i \neq 1}$ 'e karşı m_1 içerdiğini takip ederek listeleterek elde edilmiştir. Son sonuç,

$$\langle m_1(\mathbf{q}) m_1(\mathbf{q}') \rangle = \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{t + r + Kq^2} \left\{ 1 - \frac{u}{t + r + Kq^2} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{n-1}{t + Kk^2} + \frac{3}{t + r + Kk^2} \right] \right\}$$

olarak sadeleştirilebilir.

(h) \mathcal{U} 'yu bir tediğeme olarak alarak, $\langle m_2(\mathbf{q}) m_2(\mathbf{q}') \rangle$ 'a *birinci derece* düzeltmeyi hesaplayın.

• Benzer bir analiz

$$\begin{aligned} \langle m_2(\mathbf{q}) m_2(\mathbf{q}') \rangle &= \langle m_2(\mathbf{q}) m_2(\mathbf{q}') \rangle_0 - u \int \frac{d^d q_1 d^d q_2 d^d q_3}{(2\pi)^{3d}} \sum_{i,j=1}^n \\ &\quad \left(\langle m_2(\mathbf{q}) m_2(\mathbf{q}') m_i(\mathbf{q}_1) m_i(\mathbf{q}_2) m_j(\mathbf{q}_3) m_j(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \rangle_0^c \right) \\ &= \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{t + Kq^2} \left\{ 1 - \frac{u}{t + Kq^2} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{4(n-1)}{t + Kk^2} + \frac{4}{t + r + Kk^2} + \frac{8}{t + Kk^2} \right] \right\} \\ &= \frac{(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{t + Kq^2} \left\{ 1 - \frac{u}{t + Kq^2} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{n+1}{t + Kk^2} + \frac{1}{t + r + Kk^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

verir.

(i) Yukarıdaki cevabı kullanarak, χ_{22}^{-1} ters alınganlığını belirleyin, ve sonra u 'da birinci mertebeye kadar yok olduğu noktadan, geçiş noktasını t_c belirleyin.

• Salınım-tepki bağıntısını kullanarak, alınganlık

$$\begin{aligned} \chi_{22} &= \int d^d \mathbf{x} \langle m_2(\mathbf{x}) m_2(\mathbf{0}) \rangle = \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \langle m_2(\mathbf{q}) m_2(\mathbf{q} = 0) \rangle \\ &= \frac{1}{t} \left\{ 1 - \frac{u}{t} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{n+1}{t + Kk^2} + \frac{1}{t + r + Kk^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

olarak verilir. Düzeltme teriminin tersini almak,

$$\chi_{22}^{-1} = t + 4u \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{n+1}{t + Kk^2} + \frac{1}{t + r + Kk^2} \right] + O(u^2)$$

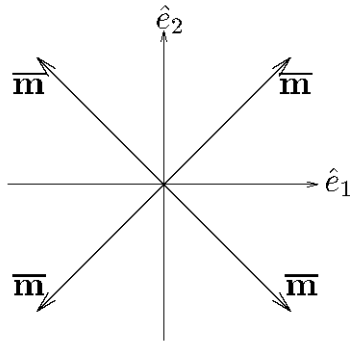
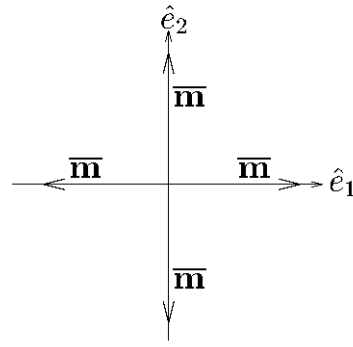
verir. Alınganlık

$$t_c = -4u \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{n+1}{Kk^2} + \frac{1}{r + Kk^2} \right] + O(u^2)$$

noktasında ıraksar.

(j) $d < 4$ 'te, kritik davranış, eşyönlü $O(n)$ modelinden farklı mıdır? RG dilinde, r parametresi $O(n)$ sabit noktasında *önemli* midir? Her iki durumda, geçiş için evrensellik sınıflarını belirtin.

• r parametresi, düzenli durumun simetrisini, dolayısıyla düzensizleşme geçişinin evrensellik sınıfını değiştirir. Şekilde gösterildiği gibi, $r > 0$ için, geçiş $O(n-1)$ evrensellik sınıfına, ve $r < 0$

 $v > 0$ köşegenel düzen $v < 0$ kübik eksen düzeni

için İsing sınıfına aittir. Bundan dolayı, herhangi bir RG dönüşümü, r 'yi $O(n)$ sabit noktasında önemli bir tedirgeme olarak bulmalıdır.

5. Kübik eşyönsüzlük- Ortalama Alanın Uygulanması: n -bileşenli $\vec{m}(\mathbf{x}) = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ için değiştirilmiş Landau-Ginzburg Hamiltoniyenini

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x} \left[\frac{K}{2} (\nabla\vec{m})^2 + \frac{t}{2} \vec{m}^2 + u(\vec{m}^2)^2 + v \sum_{i=1}^n m_i^4 \right]$$

ele alın. $\sum_{i=1}^n m_i^4$ "kübik eşyönsüzlük" terimi, tam dönme simetrisini kırar ve belirli bir yön seçer.

(a) Sabit $|\vec{m}|$ genliği için, $v > 0$ ve $v < 0$ için n bileşenli miknatıslanma uzayında hangi yönler seçilir?

• Aşağıdaki figürlerde, v 'nin işaretine bağlı olarak, $n = 2$ basit durumu için miknatıslanmanın olası yönleri belirtilmiştir.

Bu niceliksel davranış, b bileşenli bir vektör için genelleştirilebilir: $v > 0$ için \vec{m} n -boyutlu hiperkübün

$$\vec{m} = \frac{\bar{m}}{\sqrt{n}} (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$$

ile belirtilen köşegenleri boyunca uzanır, ve dolayısıyla 2^n katlı yozlaşmıştır. Aksine, $v < 0$ için, \vec{m} kübik doğrultuların \hat{e}_i herhangi biri boyunca uzanabilir, böylece

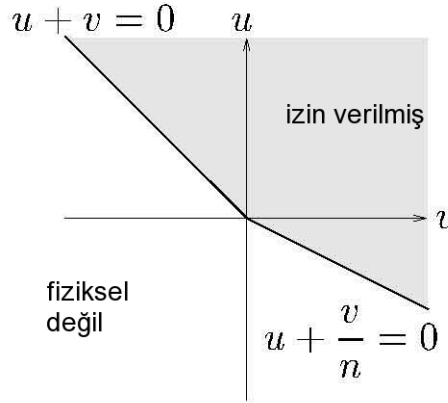
$$\vec{m} = \pm \bar{m} \hat{e}_i$$

verir, ki $2n$ katlı yozlaşmıştır.

(b) $\beta\mathcal{H}$ 'in sonlu bir en küçük değeri olması için, u ve v 'deki koşullar nelerdir? (u, v) düzleminde bu alanları kabataslak çizin.

• Bu durumların herbirinde Landau-Ginzburg Hamiltoniyeni

$$\begin{cases} \beta\mathcal{H} = \frac{t}{2} \bar{m}^2 + u \bar{m}^4 + \frac{v}{n} \bar{m}^2, & v > 0 \text{ ise} \\ \beta\mathcal{H} = \frac{t}{2} \bar{m}^2 + u \bar{m}^4 + v \bar{m}^4, & v < 0 \text{ ise} \end{cases}$$



olur, ki

$$\begin{cases} u + \frac{v}{n} > 0, & v > 0 \text{ ise} \\ u + v > 0, & v < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu sürece en küçük değerin sonlu olduğu anlamına gelir. Yukarıda, (u, v) düzlemindeki farklı bölgeler şematik olarak gösterilmiştir.

(c) Genelde, daha yüksek terimler (mesela $u_6 > 0$ olmak üzere $u_6(\bar{m}^2)^2$) vardır, ve (b) kısmında izin verilmeyen bölgelerde kararlılığı sağlarlar. Bu tarz terimleri akılda tutarak, $u > 0$ için, (t, v) düzleminde, semer noktası faz diyagramını kabataslak çizin; fazları, ve geçiş çizgilerinin derecesini açıkça belirleyerek.

• (b) kısmında izin verilmeyen bölgelerdeki kararlılığı sağlamak için, yüksek mertebeden terimleri de hesaplamamız gerekir. Aşağıdaki üç denklemleri beraber çözerek üçlü kritik nokta elde edilebilir:

$$\left. \begin{aligned} t + 4(u + v)m^2 + 6u_6m^2 &= 0 \\ t + 2(u + v)m^2 + 2u_6m^4 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{(u + v)^2}{2u_6}, \quad \bar{m}^2 = -\frac{(u + v)^2}{2u_6}$$

Dolayısıyla, (t, v) düzlemindeki semer noktası faz diyagramı aşağıdaki gibidir.

(d) Düzenli fazda, herhangi bir Goldstone fazı var mıdır?

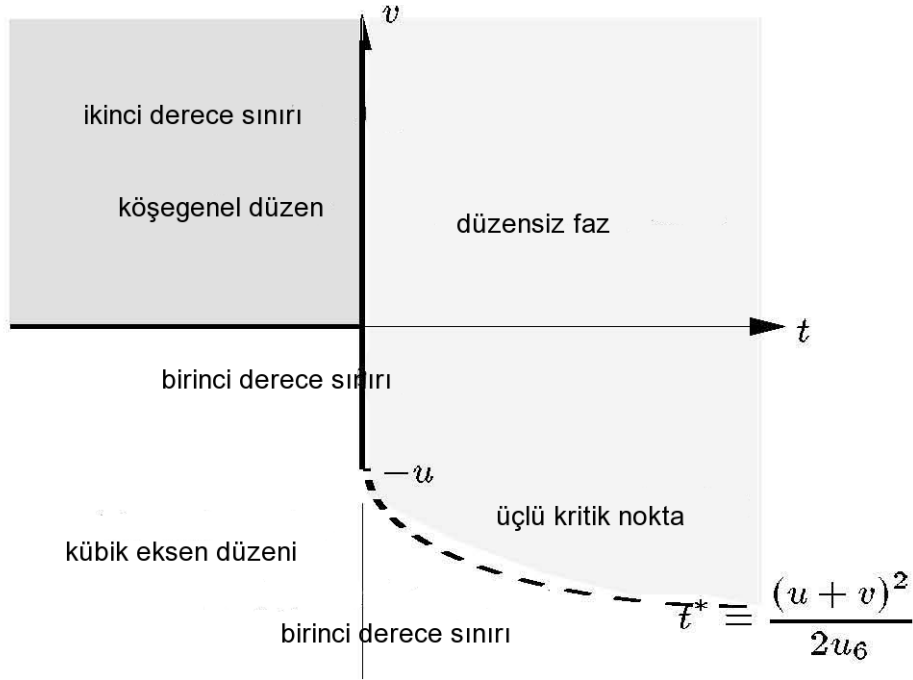
• Düzenli fazda Goldstone modları yoktur, çünkü kırılan simetri, sürekliden ziyade kesiklidir. Dikine salınımların değerini Fourier uzayında kolayca

$$\langle \phi_e(\mathbf{q}) \phi_e(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{(2\pi)^d}{Kq^2 + \frac{vt}{u+v}}$$

olarak hesaplayabiliriz, ve buradan, bu modların sadece $v = 0$ 'da kütleli olduğunu görürüz, yani tekrardan $O(n)$ simetrisini elde ettiğimizde.

6. Kübik eşyönsüzlük- ϵ açılımı:

(a) u ve v 'nin ikisinde birden bir tedirgeme açılımında ikinci mertebe terimlere bakarak, bu



çiftlenim sabitleri için yineleme bağıntılarının

$$\begin{cases} \frac{du}{d\ell} = \epsilon u - 4C [(n+8)u^2 + 6uv] \\ \frac{dv}{d\ell} = \epsilon v - 4C [12uv + 9v^2] \end{cases} \quad (2)$$

olduğunu gösterin, burada $C = K_d \Lambda^d / (t + K \Lambda^2)^2 \approx K_4 / K^2$ yaklaşık olarak bir sabittir.

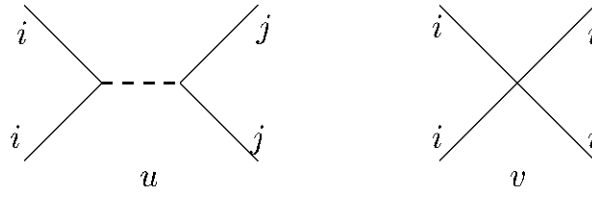
• Hamiltoniyeni Fourier modları cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned} \beta \mathcal{H} &= \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{t + K q^2}{2} \vec{m}(\mathbf{q}) \cdot \vec{m}(-\mathbf{q}) \\ &+ u \int \frac{d^d \mathbf{q}_1 d^d \mathbf{q}_2 d^d \mathbf{q}_3}{(2\pi)^{3d}} m_i(\mathbf{q}_1) m_i(\mathbf{q}_2) m_j(\mathbf{q}_3) m_j(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \\ &+ v \int \frac{d^d \mathbf{q}_1 d^d \mathbf{q}_2 d^d \mathbf{q}_3}{(2\pi)^{3d}} m_i(\mathbf{q}_1) m_i(\mathbf{q}_2) m_i(\mathbf{q}_3) m_i(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \end{aligned}$$

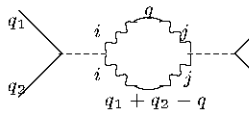
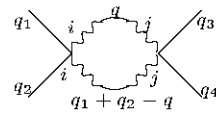
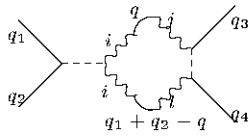
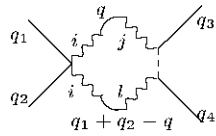
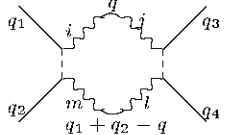
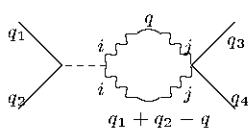
burada, sıkça olduğu gibi, tekrarlanan indeksler üzerinden topladığımızı varsayıyoruz. Problem kümesi 6'ya benzer şekilde, RG dönüşümünün üç adımından sonra, renormalize edilmiş parametreleri

$$\begin{cases} t' = b^{-d} z^2 \tilde{t} \\ K' = b^{-d-2} z^2 \tilde{K} \\ u' = b^{-3d} z^4 \tilde{u} \\ v' = b^{-3d} z^4 \tilde{v} \end{cases}$$

elde ederiz, burada \tilde{t} , \tilde{K} , \tilde{u} ve \tilde{v} , kabalaştırılmış Hamiltoniyenin parametreleridir. \tilde{u} ve \tilde{v} 'nin ilk parametrelere bağılılıkları, u ve v 'nin ikisinde ikinci dereceden tedirgeme açılımındaki diyagramlara bakılarak elde edilebilir. u ve v 'nin diyagramatik gösterimini



olarak tanımlayalım,

u'ya katkılar	v'ye katkılar
 $2 \times 2 \times 2n \frac{u^2}{2} \frac{K_d \Lambda^d}{(t + K \Lambda^2)^2} \delta l$	 $6 \times 6 \times 2 \frac{v^2}{2} \frac{K_d \Lambda^d}{(t + K \Lambda^2)^2} \delta l$
 $2 \times 2 \times 4 \times 2 \frac{u^2}{2} \frac{K_d \Lambda^d}{(t + K \Lambda^2)^2} \delta l$	 $6 \times 4 \times 2uv \frac{K_d \Lambda^d}{(t + K \Lambda^2)^2} \delta l$
 $4 \times 4 \times 2 \frac{u^2}{2} \frac{K_d \Lambda^d}{(t + K \Lambda^2)^2} \delta l$	
 $2 \times 6 \times 2uv \frac{K_d \Lambda^d}{(t + K \Lambda^2)^2} \delta l$	

burada, yeniden $b = e^{\delta \ell}$ aldık. Yeni kabalaştırılmış parametreler

$$\begin{cases} \tilde{u} &= u - 4C [(n+8)u^2 + 6uv] \delta \ell \\ \tilde{v} &= v - 4C [9v^2 + 12uv] \delta \ell \end{cases}$$

olur ki $\epsilon = 4 - d$ parametresini tanımladıktan, yeniden ölçekledikten, ve renormalize ettikten sonra,

$$\begin{cases} \frac{du}{d\ell} &= \epsilon u - 4C [(n+8)u^2 + 6uv] \\ \frac{dv}{d\ell} &= \epsilon v - 4C [9v^2 + 12uv] \end{cases}$$

yineleme bağıntılarını verir.

(b) (u, v) düzlemindeki bütün sabit noktaları bulun, ve $n < 4$ ve $n > 4$ için, akış şekillerini çizin. Her durumda, kararlı sabit nokta civarında, kubik terimin önemliliğini tartışın.

• Yineleme bağıntılarından, (u^*, v^*) sabit noktalarını elde edebiliriz. Basitleştirmek için, bundan sonra, sadece $u = 4Cu$ ve $v = 4Cv$ yeniden ölçeklenmiş niceliklerini kullanacağız, ki bunlar

cinsinden dört sabit nokta

$$\left\{ \begin{array}{ll} u^* = v^* = 0 & \text{Gaussiyen sabit noktası} \\ u^* = 0 \quad v^* = \frac{\epsilon}{9} & \text{İsing sabit noktası} \\ u^* = \frac{\epsilon}{(n+8)} \quad v^* = 0 & \mathcal{O}(n) \text{ sabit noktası} \\ u^* = \frac{\epsilon}{3n} \quad v^* = \frac{\epsilon(n-4)}{9n} & \text{Kübik sabit nokta} \end{array} \right.$$

konumlarındadır. Sabit noktaların civarında, yineleme bağıntılarını doğrusallaştırmak

$$A = \frac{d}{d\ell} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}_{u^*, v^*} = \begin{pmatrix} \epsilon - 2(n+8)u^* - 6v^* & -6u^* \\ -12v^* & \epsilon - 12u^* - 18v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}$$

verir. Her zamanki gibi, pozitif bir özdeğer kararsız bir yöne karşılık gelirken, negatif bir özdeğer kararlı bir doğrultuya karşılık gelir. Dört sabit noktanın herbiri için aşağıdakileri elde ederiz:

1. *Gaussiyen sabit noktası*: $\lambda_1 = \lambda_2 = \epsilon$, yani, bu sabit nokta, $\epsilon > 0$ için iki kere kararsızdır, çünkü

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

2. *İsing sabit noktası*: Bu sabit noktanın, bir kararlı ve bir kararsız doğrultusu vardır, çünkü

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{3} & 0 \\ -4\frac{\epsilon}{3} & -\epsilon \end{pmatrix}$$

ki $\lambda_1 = \epsilon/3$ ve $\lambda_2 = -\epsilon$ 'a karşılık gelir. $u = 0$ için, sistemin n tane birbiriyle etkileşmeyen 1-bileşenli İsing spinlerine ayrıldığına dikkat edin.

3. *$\mathcal{O}(n)$ sabit noktası*:

$$A = \begin{pmatrix} -\epsilon & -6\frac{\epsilon}{(n+8)} \\ 0 & \frac{(n-4)}{(n+8)}\epsilon \end{pmatrix}$$

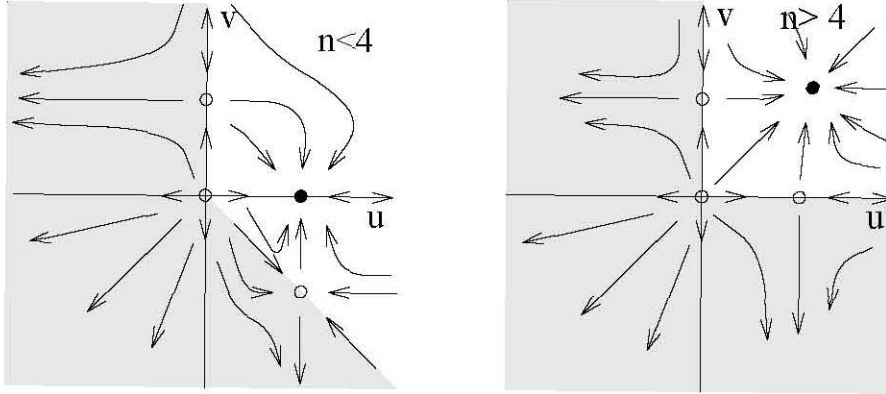
matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -\epsilon$ ve $\lambda_2 = \epsilon(n-4)/(n+8)$ 'dir. Dolayısıyla, $n > 4$ için, bu sabit noktanın bir kararlı bir kararsız yönü varken, $n < 4$ için, iki özdoğrultu da kararlıdır. Dolayısıyla, $n < 4$ için, bu sabit nokta sistemin kritik davranışını kontrol eder.

4. *Kübik sabit nokta*:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{(n+8)}{3} & -2 \\ -4\frac{(n-4)}{3} & 4-n \end{pmatrix} \frac{\epsilon}{n}$$

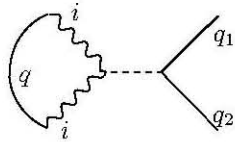
matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = \epsilon(4-n)/3n$ ve $\lambda_2 = -\epsilon$ 'dur. Dolayısıyla, $n < 4$ için, bu sabit noktanın bir kararlı ve bir kararsız doğrultusu vardır, ve $n > 4$ için, iki özdoğrultu da kararlıdır. Bu sabit nokta $n > 4$ için sistemin kritik davranışını belirler.

(u, v) düzleminde, $n < 4$ için, $v^* = 0$, ve kübik terim önemsizdir, yani salınımlar, tam dönme simetrisini restore ederler. $n > 4$ için, v önemlidir, ve aşağıdaki akışları yaratır.

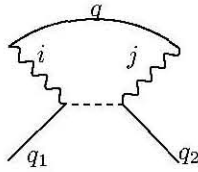


(c) İndirgenmiş sıcaklık t için yineleme bağıntılarını bulun, ve sabit noktalarda $n < 4$ ve $n > 4$ için ν üstelini hesaplayın.

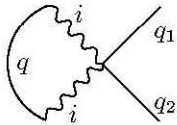
• ϵ 'da doğrusal mertebeye kadar, aşağıdaki diyagramlar, \tilde{t} 'nin belirlenmesinde katkı verir:



$$2nu \frac{K_d \Lambda^d}{(t + K\Lambda^2)} \delta l$$



$$4u \frac{K_d \Lambda^d}{(t + K\Lambda^2)} \delta l$$



$$6v \frac{K_d \Lambda^d}{(t + K\Lambda^2)} \delta l$$

$$\tilde{t} = t + 4 \frac{K_d \Lambda^d}{(t + K\Lambda^2)} [(n+2)u + 3v]$$

$$\frac{dt}{dl} = 2t + 4 \frac{K_d \Lambda^d}{(t + K\Lambda^2)} [(n+2)u + 3v]$$

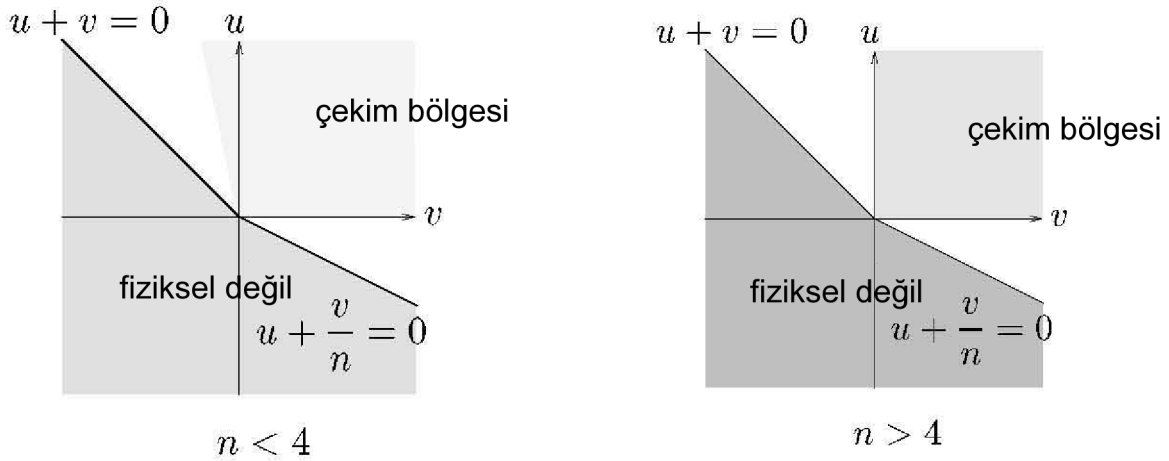
Kararlı sabit nokta civarında doğrusallaştırmadan sonra, y_t üsteli

$$y_t = 2 - 4C [(n+2)u^* + 3v^*], \implies \nu = \frac{1}{y_t} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{(n+2)}{4(n+8)}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) & n < 4 \text{ için} \\ \frac{1}{2} + \frac{(n-1)}{6n}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) & n > 4 \text{ için} \end{cases}$$

ile verilir.

(d) Salınımları dahil edince, (b) kısmında hesaplanan (u, v) düzlemindeki kararlı bölge, azalır mı artar mı? Gerçekte, yüksek mertebeden terimler her zaman olacağı için, bu, küçük negatif v ve $n > 4$ için, faz geçişinin doğası hakkında ne söyler?

• Bütün sabit noktalar, (1b)'de hesaplanan izin verilmiş bölgededir. Ancak, klasik olarak kararlı bölgelerden başlayan akışların hepsi kararlı sabit noktaya gitmez. Eğer RG akışları, bir noktayı kararlılık bölgesinin dışına çıkarırsa, salınımlar, kararlılık bölgesini azaltır. $n < 4$ ve $n > 4$ için çekicilik bölgesi, takip eden şekillerde gösterilmiştir:



İlk olarak bu çekim bölgelerinden başlamayan akışlar fiziksel olmayan bölgelere akarlar. u ve v çiftlenim sabitleri, daha fazla negatif olurlar. Bu, salınımlar tarafından, Coleman-Wienberg mekanizması olarak bilinen mekanizma aracılığıyla, sebep olunan birinci derece geçişin işaretidir. (u, v) düzleminde, kararlı sabit noktanın çekim bölgesi dışındaki bölgelerde geçişin derecesinin değişiminden salınımlar sorumludur.

(e) (t, v) düzleminde ($u > 0$), $n > 4$ ve $n < 4$ için, düzenli fazı belirleyerek, faz diyagramını kabataslak çizin. Bu fazların herhangi birinde, faz geçişi yakınında, Goldstone modları var mıdır?

- (2e)'de, t için elde edilen yineleme bağıntısından, banal olmayan

$$t^* = -\frac{1}{2} [(n+2)u^* + 3v^*] \propto -\epsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla, (t, v) düzleminde, faz diyagramı kabataslak aşağıdaki gibi çizilir:

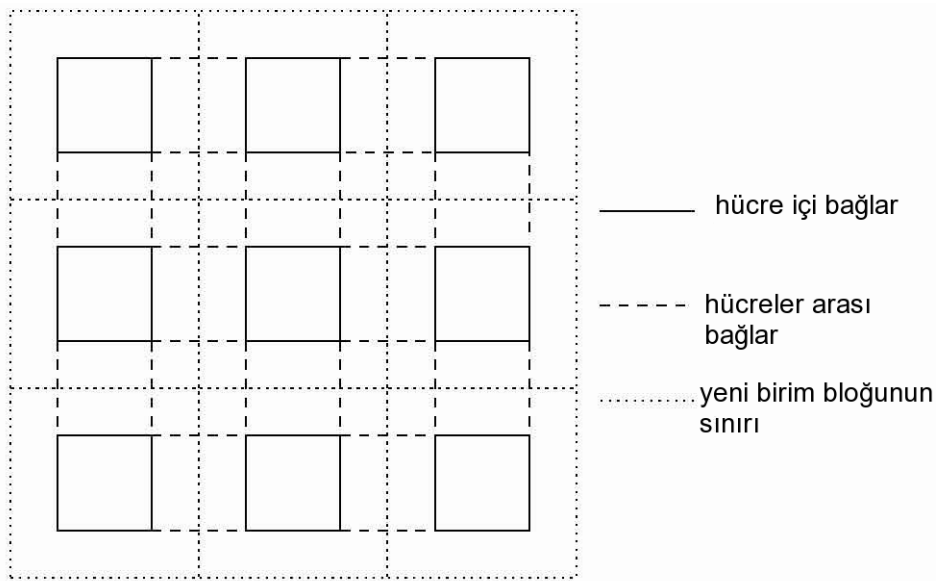
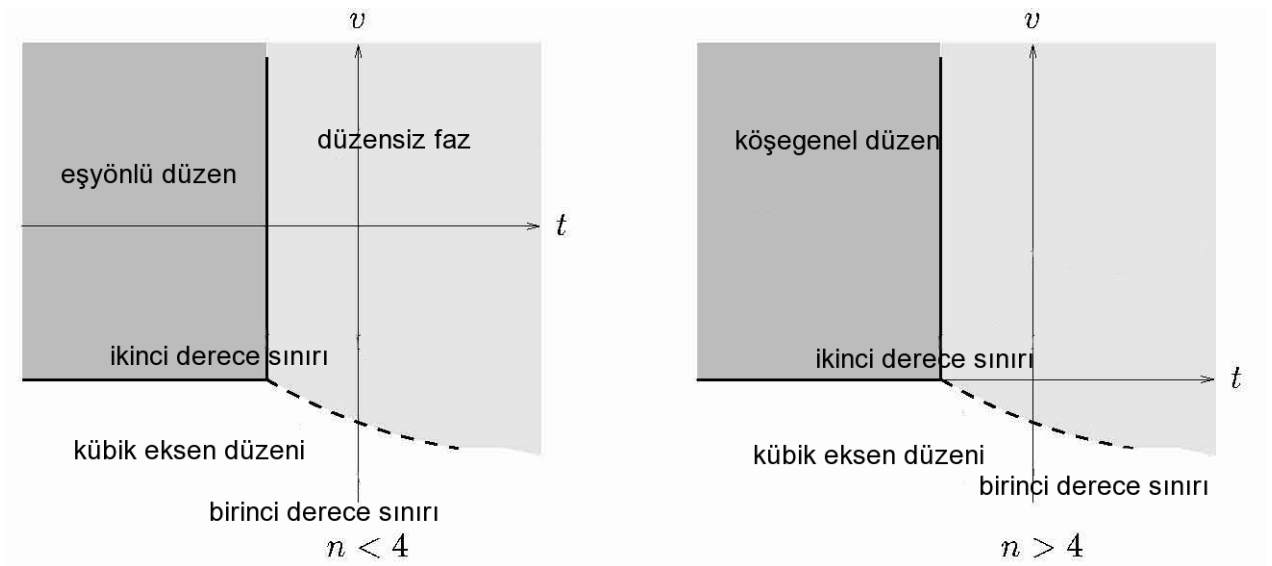
Yukarıda belirtildiği gibi, sadece $n < 4$ 'te salınımlar, tam dönme simetrisini restore ederler. v parametresi sıfıra renormalize olur, ve (u, v) düzleminde Goldstone modları vardır, ancak sadece ikinci derece faz geçişi civarında, ki burada $K\xi_t^{-2} = tv/(u+v) \rightarrow 0$. Düzenli fazda, v 'nin renormalize olmuş değeri, küçük olsa bile sonludur, ve Goldstone modlarının olmadığını gösterir.

7. Kümülant yöntemi: $-\beta\mathcal{H} = K \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j$ ile tanımlanan, kare ağ üzerindeki İsing modeline, Niemeijer-van Leeuwen birinci derece kümülant açılımını aşağıdaki adımları takip ederek uygulayın:

(a) $b = 2$ olan bir RG'de, bağları, hücre içi bileşenleri $\beta\mathcal{H}_0$ ve hücreler arası bileşenleri \mathcal{U} olarak ikiye ayırın.

- Kare ağdaki N konum, $N/4$ hücreye, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi bölüşülür (hücreler arası ve hücre içi bağlar, sırasıyla katı ve kesikli çizgilerle gösterilmiştir.) Renormalize edilmiş Hamiltoniyen $\beta\mathcal{H}'[\sigma'_\alpha]$,

$$\beta\mathcal{H}'[\sigma'_\alpha] = -\ln Z_0[\sigma'_\alpha] + \langle \mathcal{U} \rangle_0 - \frac{1}{2} \left(\langle \mathcal{U}^2 \rangle_0 - \langle \mathcal{U} \rangle_0^2 \right) + \mathcal{O}(\mathcal{U}^3)$$



ifadesinden elde edilir, burada $\langle \rangle_0$, sabit $[\sigma'_\alpha]$ 'da $\exp(-\beta\mathcal{H}_0)$ ağırlığıyla hesaplanan ortalamaları gösterir.

(b) Her α hücresi için, $\sigma'_\alpha = \text{sign}(\sigma_\alpha^1 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_\alpha^3 + \sigma_\alpha^4)$ olarak renormalize edilmiş spinleri tanımlayın. $\sum_{i=1}^4 \sigma_\alpha^i = 0$ olan dizilimler için, bu tanım belirsizdir. Bu dizilimlerin ağırlıklarını $\sigma'_\alpha = +1$ ve -1 arasında eşit olarak dağıtın. (yani, Boltzman ağırlığına ek olarak bir $1/2$ çarpanı ekleyin.) Bir hücrenin bütün olası dizilimleri, iç olasılıkları $\exp(-\beta\mathcal{H}_0)$, ve $\sigma'_\alpha = \pm 1$ 'e katkı veren ağırlıklar için bir tablo yapın.

• Renormalize edilmiş spin $\sigma'_\alpha = \pm 1$ ile tutarlı olası hücreler arası dizilimler, ve karşılık gelen hücreler arası olasılığa, $\exp(-\beta\mathcal{H}_0)$, olan katkıları aşağıda verilmiştir:

$$\sigma'_\alpha = 1$$

Ağırlık

$$\begin{array}{|c|c|} \hline + & + \\ \hline + & + \\ \hline \end{array}$$

$$e^{4K}$$

Ağırlık

$$\begin{array}{|c|c|} \hline - & + \\ \hline + & + \\ \hline \end{array}$$

$$4 \times 1$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline + & + \\ \hline - & - \\ \hline \end{array}$$

$$4 \times 1 \times \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline + & - \\ \hline - & + \\ \hline \end{array}$$

$$2 \times e^{-4K} \times \frac{1}{2}$$

$$\sigma'_\alpha = -1$$

Ağırlık

$$\begin{array}{|c|c|} \hline - & - \\ \hline - & - \\ \hline \end{array}$$

$$e^{4K}$$

Ağırlık

$$\begin{array}{|c|c|} \hline + & - \\ \hline - & - \\ \hline \end{array}$$

$$4 \times 1$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline + & + \\ \hline - & - \\ \hline \end{array}$$

$$4 \times 1 \times \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline + & - \\ \hline - & + \\ \hline \end{array}$$

$$2 \times e^{-4K} \times \frac{1}{2}$$

ki buradan

$$Z_0[\sigma'_\alpha] = \prod_{\alpha} (e^{4K} + 6 + e^{-4K}) = (e^{4K} + 6 + e^{-4K})^{N/4}$$

elde edilir.

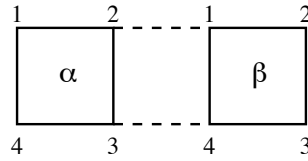
(c) $\langle \mathcal{U} \rangle_0$ 'yu σ'_α hücre spinleri cinsinden ifade edin; ve buradan $K'(K)$ yineleme bağıntısını elde edin.

• Etkileşme teriminin ilk kümülantı

$$-\langle \mathcal{U} \rangle_0 = K \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \langle \sigma_{\alpha 2} \sigma_{\beta 1} + \sigma_{\alpha 3} \sigma_{\beta 4} \rangle_0 = 2K \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \langle \sigma_{\alpha 2} \rangle_0 \langle \sigma_{\beta 1} \rangle_0$$

burada, $\sigma'_\alpha = 1$ için

$$\langle \sigma_{\alpha i} \rangle_0 = \frac{e^{4K} + (3-1) + 0 + 0}{(e^{4K} + 6 + e^{-4K})} = \frac{e^{4K} + 2}{(e^{4K} + 6 + e^{-4K})}$$



Açıkça, $\sigma'_\alpha = -1$ için, genel negatif işaretle beraber aynı sonucu elde ederiz, ve dolayısıyla

$$\langle \sigma_{\alpha i} \rangle_0 = \sigma'_\alpha \frac{e^{4K} + 2}{(e^{4K} + 6 + e^{-4K})}$$

Sonuç olarak,

$$-\beta \mathcal{H}'[\sigma'_\alpha] = \frac{N}{4} \ln(e^{4K} + 6 + e^{-4K}) + 2K \left(\frac{e^{4K} + 2}{e^{4K} + 6 + e^{-4K}} \right)^2 \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \sigma'_\alpha \sigma'_\beta$$

elde ederiz ki, $K'(K)$ için

$$K' = 2K \left(\frac{e^{4K} + 2}{e^{4K} + 6 + e^{-4K}} \right)^2$$

yineleme bağıntısının karşılık gelir.

(d) K^* sabit noktasını, ve termal y_t özdeğerini bulun.

• $K' = K = K^*$ olan sabit noktaları bulmak için $x = e^{4K^*}$ değişkenini tanımlayalım. Dolayısıyla,

$$\frac{x + 2}{x + 6 + x^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{veya} \quad (\sqrt{2} - 1)x^2 - (6 - 2\sqrt{2})x - 1 = 0$$

denklemlerini çözmemiz lazım, ki tek anlamlı çözümü $x \simeq 7.96$ 'olur, bu da $K^* \simeq 0.52$ sonucunu verir.

Termal özdeğeri bulmak için, yineleme bağıntısını, bu banal olmayan sabit nokta etrafında doğrusallaştıralım:

$$\left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K^*} = b^{y_t}, \quad \Rightarrow \quad 2^{y_t} = 1 + 8K^* \left[\frac{e^{4K^*}}{e^{4K^*} + 2} - \frac{e^{4K^*} - e^{-4K^*}}{e^{4K^*} + 6 + e^{-4K^*}} \right], \quad \Rightarrow \quad y_t \simeq 1.006$$

(e) Küçük bir manyetik alanın varlığında $h \sum_i \sigma_i$, h için yineleme bağıntısını bulun; ve sabit noktada y_t manyetik özdeğerini hesaplayın.

• Küçük bir manyetik alanın varlığında, Hamiltoniyen'e ek bir katkı daha vardır

$$h \sum_{\alpha, i} \langle \sigma_{\alpha, i} \rangle_0 = 4h \frac{e^{4K} + 2}{(e^{4K} + 6 + e^{-4K})} \sum_{\alpha} \sigma'_\alpha$$

Dolayısıyla,

$$h' = 4h \frac{e^{4K} + 2}{(e^{4K} + 6 + e^{-4K})}$$

(f) K^* , y_t ve y_h değerlerini tam değerleri ile kıyaslayın.

• Kümülant yöntemi $K^* \sim 0.52$ verirken, kare ağ üzerindeki İsing modelinin kritik noktası $K_c \sim 0.44$ 'de bulunur. y_t ve y_h 'nin iki boyutlu İsing modelindeki tam değerleri sırasıyla 1 ve 1.875 iken, kümülant yöntemi $y_t \sim 1.006$ ve $y_h \sim 1.5$ verir. Üçgensel ağda olduğu gibi, y_h , tam değerinden daha küçüktür. Genede, y_t termal üsteli şans eseri tam değerine yakındır.

8. Migdal-Kadanoff yöntemi: Bir hiperkubik ağda, i konumlarındaki, en yakın komşusu ile

$$-\beta\mathcal{H} = K \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{s_i, s_j}$$

Hamiltoniyeni ile etkileşen Potts spinlerini, $s_i = (1, 2, \dots, q)$ düşünün.

(a) $d = 1$ 'de, $b = 2$ renormalize etme/kırım işlemi ile tam yineleme bağıntılarını bulun. Bütün sabit noktaları ve kararlılıklarını belirleyin.

• $d = 1$ 'de, s_1 'in q olası değeri üzerinden ortalama alırsak,

$$\sum_{s_1=1}^q e^{K(\delta_{\sigma_1 s_1} + \delta_{s_1 \sigma_2})} = \begin{cases} q - 1 + e^{2K} & \sigma_1 = \sigma_2 \text{ için} \\ q - 2 + 2e^K & \sigma_1 \neq \sigma_2 \text{ için} \end{cases} = e^{g' + K' \delta_{\sigma_1 \sigma_2}}$$

ki buradan, tam yineleme bağıntılarını elde ederiz:

$$e^{K'} = \frac{q - 1 + e^{2K}}{q - 2 + 2e^K}, \quad e^{g'} = q - 2 + 2e^K$$

Sabit noktaları bulmak için, $K' = K = K^*$ alırsak. Daha önceki problemde olduğu gibi, $x = e^{K^*}$ değişkenini tanımlayalım. Dolayısıyla,

$$x = \frac{q - 1 + x^2}{q - 2 + 2x}, \quad \text{veya} \quad x^2 + (q - 2)x - (q - 1) = 0$$

denklemini çözmemiz lazım ki, tek anlamlı çözümü $K^* = 0$ veren $x = 1$ 'dir. Kararlılığını kontrol etmek için, $K \ll 1$ 'i ele alalım, böylece

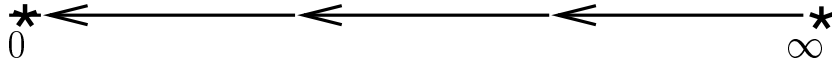
$$K' \simeq \ln \left(\frac{q + 2K + 2K^2}{q + 2K + K^2} \right) \simeq \frac{K^2}{q} \ll K$$

ki sabit noktanın kararlı olduğunu gösterir.

Ek olarak, $K^* \rightarrow \infty$ da bir sabit noktadır. Eğer $K \gg 1$ 'e bakarsak,

$$e^{K'} \simeq \frac{1}{2} e^K, \quad \implies \quad K' = K - \ln 2 < K$$

ki bu noktanın kararsız olduğunu gösterir.



(b) Migdal-Kadanoff bağ taşıma yöntemini kullanarak, $K'(K)$ yineleme denklemini d boyutta $b = 2$ için yazın.

• Migdal-Kadanoff yaklaşıklığında, bağları oynatmak, kalan bağları 2^{d-1} çarpanı ile kuvvetlendirir. Dolayısıyla, kırılma uğramış ağda,

$$e^{K'} = \frac{q - 1 + e^{2 \times 2^{d-1} K}}{q - 2 + 2e^{2^{d-1} K}}$$

olur.

(c) Sıfır ve sonsuz çiftlenimler de sabit noktaların kararlılığını kullanarak, $d > 1$ 'de sonlu K^* değerinde banal olmayan bir sabit noktanın varlığını ispatlayın.

• $K^* = 0$ sabit noktası civarında, yani $K \ll 1$ için,

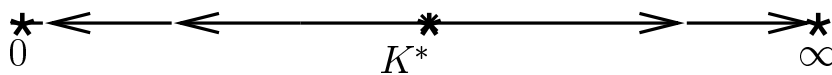
$$K' \simeq \frac{2^{2d-2} K^2}{q} \gg K$$

ve dolayısıyla, bu nokta yeniden kararlıdır. Ancak, $K^* \rightarrow \infty$ için,

$$e^{K'} \simeq \frac{1}{2} \exp \left[(2^d - 2^{d-1}) K \right], \quad \Rightarrow \quad K' = 2^{d-1} K - \ln 2 \gg K$$

ki bu sabit noktanın $d > 1$ olduğu sürece kararlı olduğu anlamına gelir.

• Sonuç olarak, sonlu bir K^* sabit noktası olması lazım, öyle ki diğer sabit noktalara akışı ayırsın.



(d) $d = 2$ için, K^* ve y_t 'yi, $q = 3$, 1 ve 0 için elde edin.

• Şimdi, $d = 2$ 'de özel bazı durumları tartışalım. Mesela, $q = 3$ 'e bakarsak, banal olmayan sabit nokta

$$x = \frac{2 + x^2}{1 + 2x^2}, \quad \text{veya} \quad x^4 - 2x^3 - x + 2 = (x - 2)(x^3 - 1) = 0$$

denkleminin çözümüdür ki $K^* = \ln 2 \simeq 0.69$ 'da banal olmayan bir sabit nokta verir. Bu nokta için termal üstel

$$\left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K^*} = 2^{y_t} = 4 \left[\frac{e^{4K^*}}{e^{4K^*} + 2} - \frac{e^{2K^*}}{1 + 2e^{2K^*}} \right] = \frac{16}{9}, \quad \Rightarrow \quad y_t \simeq 0.83$$

olur ki tam değerleri $K^* = 1.0005$ ve $y_t = 1.2$ ile kıyaslanabilir.

$q \rightarrow 1$ 'e analitik olarak devam ettirerek,

$$e^{K'} = \frac{e^{4K}}{-1 + 2e^{2K}}$$

elde ederiz. Banal olmayan sabit nokta,

$$x = \frac{x^4}{-1 + 2x^2}, \quad \text{veya,} \quad (x^3 - 2x^2 + 1) = (x - 1)(x^2 - x - 1) = 0$$

denkleminin çözümüdür, ki tek banal olmayan çözümü, $K^* = 0.48$ veren, $x = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.62$ 'dir. Bu noktadaki termal üstel

$$\left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K^*} = 2^{y_t} = 4 [1 - e^{-K^*}], \quad \implies \quad y_t \simeq 0.61$$

olarak verilir. Bir sonraki problem kümesinde tartışıldığı gibi, $q \rightarrow 1$ 'deki Potts modeli, *bağ süzülmesi* modeli ile eşleştirilebilir, ki tamamen geometrik bir olgu olmakla beraber, sürekli termal faz geçişine tamamen benzer pek çok özellik gösterir.

Ve son olarak, $q \rightarrow 0$ için, *ağ hayvanları* ile ilgili (bkz. PK#9),

$$e^{K'} = \frac{-1 + e^{4K}}{-2 + 2e^{2K}}$$

elde ederiz, ki bunun için

$$x = \frac{-1 + x^4}{-2 + 2x^2}, \quad \text{veya,} \quad x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = (x - 1)^3(x + 1) = 0$$

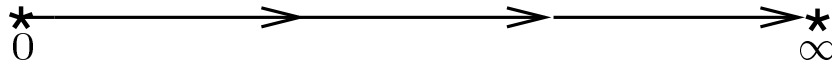
denklemini çözmemiz gerekir, ki bu denklemin tek sonlu çözümü, $x = 1$ banal çözümüdür. $q \rightarrow 0$ için, $K \ll 1$ ise,

$$K' \simeq K + \frac{K^2}{2} > K$$

elde ederiz, ki bu noktanın şimdi kararsız olduğunu gösterir. İlk düzeltmenin, sınırda bir kararlılık verdiği dikkat edin ($y_t = 0$). Yine de, $K^* \rightarrow \infty$ için,

$$e^{K'} \simeq \frac{1}{2} \exp [2K], \quad \implies \quad K' = 2K - \ln 2 \gg K$$

elde ederiz, ki bu noktanın kararlı olduğu anlamına gelir.



9. Potts modeli: *Taşıma matrisi* işlemi, Potts modeline genişletilebilir, ki burada her konumdaki s_i spini q değer alabilir $s_i = (1, 2, \dots, q)$; ve Hamiltoniyeni $-\beta\mathcal{H} = K \sum_{i=1}^N \delta_{s_i, s_{i+1}} + K \delta_{s_N, s_1}$ ile

verilir.

(a) Taşıma matrisini yazın ve köşegenleştirin. Matrisin simetrilerinden özdeğerlerini tahmin etmek kolay olduğundan, q 'uncu derece bir seküler denklem çözmeniz gerekmediğine dikkat edin.

- Bölüşüm fonksiyonu

$$Z = \sum_{\{s_i\}} \langle s_1|T|s_2\rangle \langle s_2|T|s_3\rangle \cdots \langle s_{N-1}|T|s_N\rangle \langle s_N|T|s_1\rangle = \text{İz}(T^N)$$

burada $\langle s_i|T|s_j\rangle = \exp(K\delta_{s_i,s_j})$ $q \times q$ taşıma matrisidir. Matrisin köşegenel elemanları e^K iken, köşegen dışındaki elemanları birimdir. Matrisin özvektörleri, incelemeye kolayca bulunur. Bütün elemanları eşit olan bir tane öz vektör vardır; karşılık gelen özdeğer $\lambda_1 = e^K + q - 1$ 'dir. Ayrıca, $(q - 1)$ tane, birincisine dik, yani elemanlarının toplamı sıfır olan, $(q - 1)$ özvektör vardır. Karşılık gelen özdeğerler yozdur ve $e^K - 1$ 'e eşittir. Dolayısıyla

$$Z = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^N = (e^K + q - 1)^N + (q - 1) (e^K - 1)^N$$

(b) Konum başına serbest enerjiyi hesaplayın.

- $N \gg 1$ için en büyük özdeğer belirleyici olduğu için,

$$\frac{\ln Z}{N} = \ln (e^K + q - 1)$$

(c) Bağdaşıklık uzunluğu ξ için ifadeyi verin (detaylı bir çıkarım yapmanıza gerek yok), ve $T = 1/K \rightarrow 0$ iken davranışını tartışın.

- Bağdaşıklıklar, özdeğerlerin oranının aradaki mesafeye kuvveti olarak azalır. Dolayısıyla, bağdaşıklık uzunluğu

$$\xi = \left[\ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right]^{-1} = \left[\ln \left(\frac{e^K + q - 1}{e^K - 1} \right) \right]^{-1}$$

$K \rightarrow \infty$ limitinde, yukarıdaki sonucu açarsak

$$\xi \simeq \frac{e^K}{q} = \frac{1}{q} \exp \left(\frac{1}{T} \right)$$

elde ederiz.
