8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

Tekrar Problemleri

Test, 'kapalı kitaptır,' ancak isterseniz, tek-taraflı formül sayfası getirebilirsiniz. Bu sayfanın amacı, önemli formül ve denklemleri hatırlatmaktır, ve buradaki cevapların kısa yazımı değildir. Bu ayrıcalık kötüye kullanılırsa, ilerideki sınavlarda geri alınacaktır. Test, tamamen aşağıdaki soruların bir alt kümesinden oluşacaktır. Dolayısıyla bu sorularla yakınsanız ve rahatsanız, herhangi bir sürpriz olmayacak!

****

1. *Sıvılarda Ölçeklenme:* Sıvı-gaz kritik noktası yakınında, serbest enerjinin $F/N = t^{2-\alpha}g(\delta\rho/t^{\beta})$ şeklini aldığı kabul edilir, ki burada $t = |T - T_c|/T_c$ indirgenmiş sıcaklıktır, ve $\delta\rho = \rho - \rho_c$ kritik nokta yoğunluğundan sapmayı ölçer. Herhangi bir $Q(t, \delta\rho)$ termodinamik niceliğinin önde gelen tekilliği, $\rho = \rho_c$ eşyoğunluk üzerinden kritik noktaya yaklaşırken t^x şeklindedir; veya $T = T_c$ eşsıcaklık eğrisi üzerinden bir yol için $\delta\rho^y$ şeklindedir. x ve y üstellerini aşağıdaki nicelikler için bulunuz:

(a) Parçacık başına iç enerji $\langle H\rangle/N$, ve parçacık başına entropi $s = S/N$.

(b) $C_V = T\partial s/\partial|_V$ ve $C_P = T\partial s/\partial T|_P$ ısı sığaları.

(c) Eşsıcaklık sıkıştırılabilirliği $\kappa_T = \partial\rho/\partial P|_T/\rho$, ve termal esnema katsayısı $\alpha = \partial V/\partial T|_P/V$.

(b) ve (c) kısımlarında elde ettiğiniz sonuçların $C_P - C_V = TV\alpha^2/\kappa_T$ termodinamik özdeşliği ile tutarlı olduğunu kontrol ediniz.

(d) $T < T_c$ için, beraber varolma eğrisi boyunca, erime ısısının davranışını kabaca çizin, ve t'nin fonksiyonu olarak tekilliğini bulun.

****

2. *İsing Modeli:* $d = 1 + \epsilon$ boyutundaki İsing modelinin, T sıcaklığı ve h manyetik alanı için, differansiyel yineleme bağıntıları

$$\begin{cases} \frac{dT}{d\ell} = -\epsilon T + \frac{T^2}{2} \\ \frac{dh}{d\ell} = dh \end{cases}$$

olarak verilir.

(a) Renormalizasyon gurubu akışlarını (T, h) düzleminde kabaca çizin ($\epsilon > 0$ için), $h = 0$ ekseni boyunca, sabit noktaları işaretleyin.

(b) Kritik sabit noktada, y_t ve y_h özdeğerlerini, ϵ mertebesine kadar hesaplayın

(c) Renormalizasyon altında ξ bağdaşıklık uzunluğunun değişimini belirleyen denklemden başlayarak, $\xi(t, h) = t^{-\nu}g_{\xi}(h/|t|^{\Delta})$ (burada $t = T/T_c - 1$) olduğunu gösterin, ve ν ve Δ üstellerini bulun.

(d) Hiperölçekleme bağıntılarını, serbest enerjinin tekil kısmını bulmak $f_{\text{tek.}}(t, h)$, ve dolayısıyla ısı sığası üstelini, için kullanın.

(e) Mıknatıslanma ve alınganlığın tekil davranışları için, sırasıyla, β ve γ üstellerini bulun.

(f) Alınganlık ve yerel mıknatıslanmaların bağdaşıklıkları arasındaki bağıntıdan başlayarak, kritik bağdaşıklıklar ($\langle m(\mathbf{0})m(\mathbf{x})\rangle \sim |\mathbf{x}|^{-(d-2+\eta)}$) için η üstelini hesaplayın.

(g) $d = 1$'de, $T \to 0$ iken ($h = 0$ boyunca), bağdaşıklıklar nasıl ıraksar?

****

3. *Boyuna Alınganlık:* Ortalama alan düzeyinde, boyuna alınganlığın ıraksaması için hiçbir sebep yokken, gerçekte, $d < 4$ boyutlarında salınımlardan dolayı ıraksar. Bu problemde, bu ıraksamanın tedirgeme kuramındaki kaynağını göstermek amaçlanmıştır. Aslında, bu hesaptaki değişik adımlarda, ihmal etmeniz söylenen bazı incelikler vardır. Niye geçerli olduklarını düşünmek isteyebilirsiniz.

n bileşenli bir mıknatıslanma vektörünü $\vec{m}(\mathbf{x})$ tasvir eden Landau-Ginzburg Hamiltoniyenini

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{K}{2}(\nabla\vec{m})^2 + \frac{t}{2}\vec{m}^2 + u(\vec{m}^2)^2\right]$$

$t < 0$ için düzenli fazda ele alalım.

(a) $\vec{m}(\mathbf{x}) = (\bar{m} + \phi_b(\mathbf{x}))\hat{e}_b + \vec{\phi}_e(\mathbf{x})\hat{e}_e$ olsun, ve $\beta\mathcal{H}$'yi *açılımdaki bütün terimleri tutarak* açalım.

(b) ϕ_b ve $\vec{\phi}_e$'de ikinci derece terimleri, tedirgenmemiş Hamiltoniyen $\beta\mathcal{H}_0$ olarak alalım, ve ϕ_b ile $\vec{\phi}_e$'yi birbirine çiftleyen en düşük mertebe terimi de U tedirgemesi olarak, yani

$$U = 4u\bar{m}\int d^d\mathbf{x}\phi_b(\mathbf{x})\vec{\phi}_e(\mathbf{x})^2$$

U'yu Fourier uzayında, $\phi_b(\mathbf{q})$, ve $\vec{\phi}_e(\mathbf{q})$ cinsinden yazın.

(c)Gaussiyan (çıplak) $\langle\phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}')\rangle_0$ ve $\langle\phi_{e,\alpha}(\mathbf{q})\phi_{e,\beta}(\mathbf{q}')\rangle_0$ beklenen değerlerini, ve karşılık gelen, momentum bağımlı $\chi_b(\mathbf{q})_0$ ve $\chi_e(\mathbf{q})_0$ alınganlıklarını hesaplayın.

(d) $\langle\vec{\phi}_e(\mathbf{q}_1)\cdot\vec{\phi}_e(\mathbf{q}_2)\vec{\phi}_e(\mathbf{q'}_1)\cdot\vec{\phi}_e(\mathbf{q'}_2)\rangle_0$'i Wick kuramı kullanarak hesaplayın. ($\vec{\phi}_e$'nin $(n-1)$ bileşenli bir vektör olduğunu unutmayın)

(e) $\langle\phi_b(\mathbf{q})\phi_b(\mathbf{q}')\rangle$ ifadesini, U tedirgemesinde ikinci dereceye kadar yazın. U, ϕ_b'da tek olduğu için, ikinci mertebede sadece iki terim sıfırdan farklıdır.

(f) U'nın fourier modundaki ifadesini kullanarak, düzeltme terimini, (d) kısmındakine benzer, iki tane 4-nokta beklenen değerinin çarpımı olarak yazın. Sadece boylamsal 4-nokta fonksiyonunun bağlantılı terimlerinin hesaplanması gerektiğine dikkat edin.

(g) (d)'de elde edilen bağlantısız terimi ihmal edin (yani $(n-1)^2$ ile orantılı kısmı), ve $\chi_b(\mathbf{q})$ için tedirgemede ikinci mertebeden bir ifade yazın.

(h) $d < 4$ için, düzeltme teriminin $q \to 0$ için q^{d-4} olarak ıraksadığını gösterin, ki bu sonsuz boylamsal alınganlık anlamına gelir.

****

4. *Kristal Eşyönsüzlük:* Dörtgensel kristal yapılı bir ferromanyet düşünelim. Spinlerin alttaki ağ ile olan çiftlenmesi, tam dönme simetrisini yok edebilir. Elde edilen eşyönsüzlükler, Landau-Ginzburg Hamiltoniyenini değiştirerek tasvir edilebilir:

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{K}{2}(\nabla\vec{m})^2 + \frac{t}{2}\vec{m}^2 + u\left(\vec{m}^2\right)^2 + \frac{r}{2}m_1^2 + vm_1^2\vec{m}^2\right]$$

burada $\vec{m} \equiv (m_1, \cdots, m_n)$, ve $\vec{m}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i^2$'dir (üç boyuttaki mıknatıslar için $d = n = 3$)
(a) Sabit $|\vec{m}|$ genliği için; $r > 0$ ve $r < 0$ için, n boyutlu mıknatıslanma uzayında hangi yönler seçilmiştir.
(b) Semer noktası yaklaşımını kullanarak, düzgün şekilde, 1 yönüne *parallel* ve *dik* mıknatıslanmış fazlar için serbest enerjileri ($\ln Z$) hesaplayın.
(c) Faz diyagramını (t, r) düzleminde kabataslak çizin, ve fazları (derece türü) ve doğasını (sürekli veya süreksiz) işaretleyin.
(d) Düzenli fazda, Goldstone modları var mıdır?
(e)$u = 0$, ve pozitif t ve r için, tedirgenmemiş $\langle m_1(\mathbf{q}) m_1(\mathbf{q}')\rangle_0$ ve $\langle m_2(\mathbf{q}) m_2(bfq')\rangle_0$ ortalamalarını hesaplayın, burada $m_i(\mathbf{q})$, $m_i(\mathbf{x})$'in Fourier dönüşümünü gösterir.
(f) Dördüncü derece terimi $\mathcal{U} \equiv u \int d^d\mathbf{x} (\vec{m}^2)^2$, $m_i(\mathbf{q})$ Fourier modları cinsinden yazın.
(g) $\mathcal{U}$'yu bir tedirgeme olarak alarak, $\langle m_1(\mathbf{q}) m_1(\mathbf{q}')\rangle$'a *birinci derece* düzeltmeyi hesaplayın. (Cevabınızı bazı integraller şeklinde bırakabilirsiniz.)
(h) $\mathcal{U}$'yu bir tedirgeme olarak alarak, $\langle m_2(\mathbf{q}) m_2(\mathbf{q}')\rangle$'a *birinci derece* düzeltmeyi hesaplayın.
(i) Yukarıdaki cevabı kullanarak, χ_{22}^{-1} ters alınganlığını belirleyin, ve sonra u'da birinci mertebeye kadar yok olduğu noktadan, geçiş noktasını t_c belirleyin.
(j) $d < 4$'te, kritik davranış, eşyönlü $O(n)$ modelinden farklı mıdır? RG dilinde, r parametresi $\mathcal{O}(n)$ sabit noktasında *önemli* midir? Her iki durumda, geçiş için evrensellik sınıflarını belirtin.

****

5. *Kübik eşyönsüzlük- Ortalama Alanın Uygulanması:* n-bileşenli $\vec{m}(\mathbf{x}) = (m_1, m_2, \cdots, m_n)$ için değiştirilmiş Landau-Ginzburg Hamiltoniyenini

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x} \left[\frac{K}{2}(\nabla\vec{m})^2 + \frac{t}{2}\vec{m}^2 + u(\vec{m}^2)^2 + v\sum_{i=1}^{n} m_i^4 \right]$$

ele alın. $\sum_{i=1}^{n} m_i^4$ "kübik eşyönsüzlük" terimi, tam dönme simetrisini kırar ve belirli bir yön seçer.
(a) Sabit $|\vec{m}|$ genliği için, $v > 0$ ve $v < 0$ için n bileşenli mıknatıslanma uzayında hangi yönler seçilir?
(b) $\beta\mathcal{H}$'in sonlu bir en küçük değeri olması için, u ve v'deki koşullar nelerdir? (u, v) düzleminde bu alanları kabataslak çizin.
(c) Genelde, daha yüksek terimler (mesela $u_6 > 0$ olmak üzere $u_6(\vec{m}^2)^2$) vardır, ve (b) kısmında izin verilmeyen bölgelerde kararlılığı sağlarlar. Bu tarz terimleri akılda tutarak, $u > 0$ için, (t, v) düzleminde, semer noktası faz diyagramını kabataslak çizin; fazları, ve geçiş çizgilerinin derecesini açıkça belirleyerek.
(d) Düzenli fazda, herhangi bir Goldstone fazı var mıdır?

****

6. *Kübik eşyönsüzlük-ϵ açılımı:*
(a) u ve v'nin ikisinde birden bir tedirgeme açılımında ikinci mertebe terimlere bakarak, bu

çiftlenim sabitleri için yineleme bağıntılarının

$$\begin{cases} \frac{du}{d\ell} = \epsilon u - 4C\left[(n+8)u^2 + 6uv\right] \\ \frac{dv}{d\ell} = \epsilon v - 4C\left[12uv + 9v^2\right] \end{cases}$$

olduğunu gösterin, burada $C = K_d \Lambda^d/(t + K\Lambda^2)^2 \approx K_4/K^2$ yaklaşık olarak bir sabittir.
(b) (u, v) düzlemindeki bütün sabit noktaları bulun, ve $n < 4$ ve $n > 4$ için, akış şekillerini çizin. Her durumda, kararlı sabit nokta civarında, kubik terimin önemliliğini tartışın.
(c) İndirgenmiş sıcaklık t için yineleme bağıntılarını bulun, ve sabit noktalarda $n < 4$ ve $n > 4$ için ν üstelini hesaplayın.
(d) Salınımları dahil edince, (b) kısmında hesaplanan (u, v) düzlemindeki kararlı bölge, azalır mı artar mı? Gerçekte, yüksek mertebeden terimler her zaman olacağı için, bu, küçük negatif v ve $n > 4$ için, faz geçişinin doğası hakkında ne söyler?
(e) (t, v) düzleminde $(u > 0)$, $n > 4$ ve $n < 4$ için, düzenli fazı belirleyerek, faz diyagramını kabataslak çizin. Bu fazların herhangi birinde, faz geçişi yakınında, Goldstone modları var mıdır?

****

7. *Kümülant yöntemi:* $-\beta\mathcal{H} = K\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j$ ile tanımlanan, *kare* ağ üzerindeki İsing modeline, Niemeijer-van Leewen birinci derece kümülant açılımını aşağıdaki adımları takip ederek uygulayın:
(a) $b = 2$ olan bir RG'de, bağları, *hücre içi* bileşenleri $\beta\mathcal{H}_0$ ve *hücreler arası* bileşenleri $\mathcal{U}$ olarak ikiye ayırın.
(b) Her α hücresi için, $\sigma'_\alpha = \text{sign}(\sigma^1_\alpha + \sigma^2_\alpha + \sigma^3_\alpha + \sigma^4_\alpha)$ olarak renormalize edilmiş spinleri tanımlayın. $\sum_{i=1}^4 \sigma^1_\alpha = 0$ olan dizilimler için, bu tanım belirsizdir. Bu dizilimlerin ağırlıklarını $\sigma'_\alpha = +1$ ve -1 arasında eşit olarak dağıtın. (yani, Boltzman ağırlığına ek olarak bir $1/2$ çarpanı ekleyin.) Bir hücrenin bütün olası dizilimleri, iç olasılıkları $\exp(-\beta\mathcal{H}_0)$, ve $\sigma'_\alpha = \pm 1$'e katkı veren ağırlıklar için bir tablo yapın.
(c) $\langle\mathcal{U}\rangle_0$'yu σ'_α hücre spinleri cinsinden ifade edin; ve buradan $K'(K)$ yineleme bağıntısını elde edin.
(d) K^* sabit noktasını, ve termal y_t özdeğerini bulun.
(e) Küçük bir manyetik alanın varlığında $h\sum_i \sigma_i$, h için yineleme bağıntısını bulun; ve sabit noktada y_t manyetik özdeğerini hesaplayın.
(f) K^*, y_t ve y_h değerlerini tam değerleri ile kıyaslayın.

****

8. *Migdal-Kadanoff yöntemi:* Bir hiperkubik ağda, i konumlarındaki, en yakın komşusu ile

$$-\beta\mathcal{H} = K\sum_{<ij>}\delta_{s_i,s_j}$$

Hamiltoniyeni ile etkileşen Potts spinlerini, $s_i = (1, 2, \cdots, q)$ düşünün.
(a) $d = 1$'de, $b = 2$ renormalize etme/kırım işlemi ile tam yineleme bağıntılarını bulun. Bütün

sabit noktaları ve kararlılıklarını belirleyin.
(b) Migdal-Kadanoff bağ taşıma yöntemini kullanarak, $K'(K)$ yineleme denklemini d boyutta $b = 2$ için yazın.
(c) Sıfır ve sonsuz çiftlenimler de sabit noktaların kararlılığını kullanarak, $d > 1$'de sonlu K^* değerinde banal olmayan bir sabit noktanın varlığını ispatlayın.
(d) $d = 2$ için, K^* ve y_t'yi, $q = 3,\ 1$ ve 0 için elde edin.

****

9. *Potts modeli: Taşıma matrisi* işlemi, Potts modeline genişletilebilir, ki burada her konumdaki s_i spini q değer alabilir $s_i = (1, 2, \cdots, q)$; ve Hamiltoniyeni $-\beta\mathcal{H} = K\sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i,s_{i+1}} + K\delta_{s_N,s_1}$ ile verilir.
(a) Taşıma matrisini yazın ve köşegenleştirin. Matrisin simetrilerinden özdeğerlerini tahmin etmek kolay olduğundan, q'uncu derece bir seküler denklem çözmeniz gerekmediğine dikkat edin.
(b) Konum başına serbest enerjiyi hesaplayın.
(c) Bağdaşıklık uzunluğu ξ için ifadeyi verin (detaylı bir çıkarım yapmanıza gerek yok), ve $T = 1/K \to 0$ iken davranışını tartışın.

****