Spin Dalgalarının Ötesinde

1. *Uzun erimli etkileşimi olan, doğrusal olmayan σ modeli:* n bileşenli,

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x} \int d^d\mathbf{y} K(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\vec{s}(\mathbf{x}) \cdot \vec{(}\mathbf{y})$$

Hamiltoniyeni ile etkileşen, birim spinleri düşünün $\vec{s}(\mathbf{x}) = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$, $|\vec{s}(\mathbf{x})|^2 = \sum_i s_i(\mathbf{x})^2 = 1$ olmak üzere.

(a) $K(x)$ uzun erimli etkileşimi, $\omega < 2$ olmak üzere $Kq^\omega/2$'nin Fourier dönüşümüdür. Etkileşimlerin uzun mesafelerde hangi asimptotik azalması, böyle bir azalmayla tutarlıdır? (Cevap için boyutsal inceleme yeterlidir, hiçbir integrali açıkça almak gerekmemektedir.)

(b) Sıfır sıcaklık yakınında, $\vec{s}(\mathbf{x}) = (\vec{\pi}(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}))$ alabiliriz, burada $\vec{\pi}(\mathbf{x})$, temel durum etrafındaki *küçük salınımları* gösteren $n-1$ bileşenli bir vektördür. $\vec{\pi}(\mathbf{x})$ için etkin Hamiltoniyeni, $\{\sigma(\mathbf{x})\}$'ları integralleyerek bulun.

(c) Yukarıdaki Hamiltoniyenin, *ikinci derece kısmının*, K ile orantılı terimlere odaklanarak, Fourier transformunu alın, ve buradan $\langle \pi_i(\mathbf{q})\pi_j(\mathbf{q}')\rangle_0$'ı hesaplayın.

Şimdi, $\mathbf{q}$'su $\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda$ kabuğunda olan $\vec{\pi}^>(\mathbf{q})$ Fourier modlarının integralini alarak, renormalizasyon gurubunu oluşturacağız.

(d) Bu modları kaldırdıktan sonra, π^2 mertebesine kadar k$\langle\sigma\rangle_0$ kabalaştırılmış beklenen değerini hesaplayın. $\vec{s}'$'yi yine birim vektör yapan ölçekleme çarpanını bulun, $\vec{s}'(\mathbf{x}) = \vec{s}^<(\mathbf{x})/\zeta$

(e) Uzun erimli etkileşimlerin, basitleştiren bir özelliği, tedirgemenin bütün mertebelerinde, kabalaştırılmış çiftlenim sabitinin değişmemesidir, yani $\tilde{K} = K$. Bu bilgiyi, basit boyutsal analiz ile beraber kullanarak, renormalize edilmiş $K'(b)$ etkileşimini K, b ve ζ cinsinden ifade edin.

(f) $T = 1/K$ için *differansiyel* RG denklemlerini $b = 1 + \delta\ell$ alarak oluşturun.

(g) $f = \omega + \epsilon$ için, T_c ve ν kritik üstelini, ϵ'da en düşük mertebeye kadar hesaplayın.

(h) Hamiltoniyene, simetriyi kıran küçük bir terim ekleyin, $-\vec{h} \cdot \int d^d\mathbf{x}\vec{s}(\mathbf{x})$. h'nin renormalizasyonunu bulun, ve karşılık gelen y_h üstelini belirleyin.

****

2. $2+\epsilon$ *boyutunda XY modeli:* XY modelinin iki boyuttaki yineleme bağıntısı $d = 2+\epsilon$ boyuta genelleştirilebilir, ve

$$\begin{cases} \frac{dT}{d\ell} = -\epsilon T + 4\pi^3 y^2 \\ \frac{dy}{d\ell} = \left(2 - \frac{\pi}{T}\right) y \end{cases}$$

halini alır.

(a) Sonlu sıcaklık faz geçişi için, sabit noktanın konumunu hesaplayın.

(b) Bu sabit noktadaki özdeğerleri, ϵ'da katkı veren *en düşük* mertebeye kadar

hesaplayın.
(c) Bu sonuçlardan, $d = 3$'teki süperakışkan geçiş için ν ve α üstellerini tahmin edin. [Açılımınızdaki, ϵ'un sadece banal olmayan en düşük kuvvetini takip ederken dikkatli olun.]

****

3. (Seçmeli problem) *Simetri kıran alanlar:* XY modeline

$$-\beta\mathcal{H}_p = h_p \int d^{\mathrm{x}} \cos(p\theta(\mathbf{x}))$$

terimini eklemeyi araştıralım. Böyle simetri kıran terimin pek çok sebebi olabilir: $p = 1$, genel 'manyetik alan'dır, $p = 2,\ 3,\ 4$ ve 6, sırasıyla, dikdörtgensel, altıgen, kara ve üçgensel simetrite sahip ağla eşleşmeden kaynaklanabilir. $h_p \to \infty$ iken, spinler kesikli olur, ve p farklı değer alabilir, ve model saat modellerine denk olur.
(a) Düşük sıcaklık fazında olduğumuzu varsayın, böylece girdaplar olmasın, yani girdap kaçarlığı y sıfır olsun (RG anlamında). Bu durumda, θ'nın açısal doğasını ihmal edebiliriz, ve ϕ skalar olanıyla yer değiştirebiliriz, buradan

$$Z = \int D\phi(\mathbf{x}) \exp\left\{-\int d^2\mathbf{x}\left[\frac{K}{2}(\nabla\phi)^2 + h_p\cos(p\phi)\right]\right\}$$

elde ederiz. Bu sine-Gordon modeli olarak bilinir, ve pürüzleşme geçişine denktir. h_p ve K için yineleme bağıntılarını elde edin.
(b) Girdaplar dahil edilince, yineleme bağıntıları

$$\begin{cases} \frac{dh_p}{d\ell} &= \left(2 - \frac{p^2}{4\pi K}\right) h_p \\ \frac{dK^{-1}}{d\ell} &= -\frac{\pi p^2 h_p^2}{2} K^{-2} + 4\pi^3 y^2 \\ \frac{dy}{d\ell} &= (2 - \pi K) y \end{cases}$$

olur.
(c) Yukarıdaki RG denklemlerinin sadece $\frac{8\pi}{p^2} < K^{-1} < \frac{\pi}{2}$ için, yani sadece $p > 4$'te, geçerli olduğunu gösterin. $p > 4$ ve $p < 4$ için olası faz diyagramlarını kabaca çizin. Aslında, majinal bir h_4 operatörü var olduğu için, $p = 4$ oldukça özeldir, ve 4-katlı faza (kübik eşyönsüzlük) geçişin sürekli olarak değişen kritik üstelleri vardır!

****

4. *Ters-kare etkileşimleri:* Tek boyutta,

$$-\beta\mathcal{H}_s = \frac{K}{2}\int dxdy \frac{s(x)s(y)}{|x-y|^2} + \int dx\Phi\left[s(x)\right]$$

enerjisine tabi, $s(x)$ skalar alanını düşünün. Yerel enerji $\Phi\left[s\right]$ şiddetle $s(x) = \pm 1$'i tercih ediyor olsun, (mesela $\Phi[s] = g(s^2-1)^2$, $g \gg 1$ olmak üzere.)

(a) $K > 0$ olduğunda, temel durum ferromanyetiktir. L uzunluğundaki bir zincir için, tek bir alan duvarının enerji maliyetini tahmin edin. $s = +1$'den $s = -1$'e geçişin, küçük bir uzunluk sınırında a olduğunu varsayabilirsiniz.
(b) Tek bir bükülmenin oluşma olasılığından, düzenli ve düzensiz fazları ayıran kritik çiflenim K_c için alt sınırı elde edin.
(c) $\{x_i\}$ konumlarına yerleşmiş seyrek bir alan duvarı gurubu için enerjinin

$$-\beta\mathcal{H}_Q = 4K\sum_{i<j} q_i q_j \ln\left(\frac{|x_i - x_j|}{a}\right) + \ln y_0 \sum_i |q_i|$$

olduğunu gösterin, burada, bölge duvarında $s(x)$'in artıyor mu azalıyor mu olduğuna bağlı olarak $q_i = \pm 1$ olur. (İpucu: Kısmi integral alın, ve a boyutuna kabalaştırın. $\Phi[s]$ fonksiyonu, sadece bölge duvarının çekirdek enerjisine katkı verir, ki bu da y_0 kaçarlığını verir.
(d) L mesafesindeki iki zıt bölge duvarı arasındaki logaritmik etkileşim, aradaki diğer bölge duvarlarının perdelemesi yüzünden azalmıştır. Bu etkileşim, y_0'da tedirgemeyle hesaplanabilir, ve en düşük mertebede

$$K \to K_{etkin} = K - 2Ky_0^2 \int_0^\infty drd\left(\frac{a}{r}\right)^{4K} + \mathcal{O}(y_0^4) \tag{1}$$

etkin çiftlenim sabiti ile tasvir edilebilir (sonraya bkz.) Sınırı a'dan $ba = (1 + \delta\ell)a$'ya değiştirerek, K ve y_0 parametreleri için differansiyel yineleme bağıntılarını oluşturun.
(e) Renormalizasyon gurubu akışını $T = K^{-1}$ ve y_0'ın fonksiyonu olarak kabataslak çizin, ve modelin fazlarını tartışın.
(f) Yukarıdaki etkin etkileşmeyi, denklem 1'deki gibi çıkarın. (İpucu: Bu, yüklerin sırayla değişmesi gerektiği için, iki boyutlu Coulomb gazındaki hesaptan kısmen daha kolaydır.)

****

5. *Erime* Eşyönsüz bir ağın, $u_i(\mathbf{x})$ bozulmasının elastik enerji maliyeti

$$-\beta\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int d^d\mathbf{x}\left[2\mu u_{ij}u_{ij} + \lambda u_{ii}u_{jj}\right]$$

olur, burada $u_{ij}(\mathbf{x}) = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$ gerilme tensörüdür.
(a) Enerjiyi, $u_i(\mathbf{q})$ Fourier dönüşümleri cinsinden ifade edin, ve salınımların normal modlarını bulun.
(b) $\langle u_i(\mathbf{q})u_j(\mathbf{q}')\rangle$ beklenen değerlerini bulun.
(c) Ağ aralığı a mertebesinde bir alt mesafe sınırı varsayarak, $U^2(\mathbf{x}) \equiv \langle(\vec{u}(\mathbf{x}) - \vec{u}(\mathbf{0}))^2\rangle$'yı hesaplayın.
(d) (Sezgisel) *Lindemann Kriteri*, ağın, deformasyonlar ağ aralığın belli bir oranına geldiği zaman eridiğini söyler, yani $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} U(\mathbf{x}) = c_L a$ için. $\mu = \hat{\mu}/(k_B T)$ ve

$\lambda = \hat{\lambda}/(k_B T)$ olduğunu varsayarak, yukarıdaki kriterden, erime sıcaklığını T_e hesaplayın. T_e'nin boyuta d bağlılığını yorumlayın.

****