8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

Salınımlar

1. *'Kütlesiz' bir alana çiftlenim:* Skalar $A(\mathbf{x})$ alanına

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{K}{2}(\nabla\vec{m})^2 + \frac{t}{2}\vec{m}^2 + u(\vec{m}^2)^2 + e^2\vec{m}^2A^2 + \frac{L}{2}(\nabla A)^2\right]$$

K, L, ve u pozitif olmak üzere, Hamiltoniyeniyle çiftlenmiş n-bileşenli bir vektör alanı düşünün $\vec{m}(\mathbf{x})$.

(a) $\vec{m}(\mathbf{x}) = \bar{m}\hat{e}_b$ ve $A(x) = 0$ şeklinde bir semer noktası çözümü olduğunu gösterin, ve $t > 0$ ve $t < 0$ için $\bar{m}$'i bulun.

(b) Isı sığasını $C = \partial^2 \ln Z/\partial t^2$ kabaca çizin, ve semer noktası yaklaşıklığında, $t \to 0$ iken tekilliğini tartışın.

(c)

$$\begin{cases} \vec{m}(\mathbf{x}) &= (\bar{m} + \phi_b(\mathbf{x}))\,\hat{e}_b + \phi_e(\mathbf{x})\hat{e}_e \\ A(\mathbf{x}) &= a(\mathbf{x}) \end{cases}$$

seçerek ve $\beta\mathcal{H}$'i ϕ ve a'da ikinci mertebeye kadar açarak, salınımları dahil edin.

(d) Bağdaşma uzunlukları ξ_b ve ξ_e'yi ϕ'nin boylamsal ve enine bileşenleri için bulun.

(e) a skalar alanının salınımları için ξ_a bağdaşma uzunluğunu, $t > 0$ ve $t < 0$ için bulun.

(f)$t > 0$ için $\langle a(\mathbf{x})a(\mathbf{0})\rangle$ bağdaşma fonksiyonunu hesaplayın

(g) Semer noktası serbest enerjisine $\ln Z$, salınımlardan gelen düzeltmeleri hesaplayın. (Cevabı, ξ_b, ξ_e ve ξ_a'yi içeren integraller şeklinde bırakabilirsiniz.)

(h) (b)'deki ısı sığasına, salınımlardan gelen düzeltmeleri hesaplayınız, sonucu yine integraller cinsinden bırakınız.

(i) Yukarıda çıkan integrallerin davranışını şematik olarak tartışın, ve bağdaşma uzunluğu ξ, ve sınır Λ'ya farklı boyutlarda bağlılığını belirtin.

(j) Semer noktası sonuçlarının geçerliliği için kritik boyut nedir, ve bu skalar alanla çiftlenmeden nasıl etkilenir?

****

2. *Rastgele manyetik alanlar:*

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{K}{2}(\nabla m)^2 + \frac{t}{2}m^2 + um^4 - h(\mathbf{x})m(\mathbf{x})\right]$$

Hamiltoniyenini ele alın, burada $m(\mathbf{x})$ ve $h(\mathbf{x})$ skalar alanlardır, ve $u > 0$. Rastgele manyetik alan $h(\mathbf{x})$, uzayda birbirinden bağımsız olarak dağıtılmış, dondurulmuş (quenched) safsızlıklardan kaynaklanır. Basitleştirmek için, $h(\mathbf{x})$'in her $\mathbf{x}$ noktasında bağımsız Gaussiyan bir değişken olduğu varsayılmıştır, öyle ki

$$\overline{h(\mathbf{x})} = 0, \quad \text{ve} \quad \overline{h(\mathbf{x})h(\mathbf{x}')} = \Delta\delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{1}$$

burada üst çizgi, rastgele alanların değerleri üzerinden (*quench*) ortalamasını gösterir.

Yukarıdaki denklem, Fourier dönüştürülmüş alanların $h(\mathbf{q})$

$$\overline{h(\mathbf{q})} = 0, \quad \text{ve} \quad \overline{h(\mathbf{x})h(\mathbf{a}')} = \Delta(2\pi)^d \delta^3(\mathbf{q}+\mathbf{q}') \tag{2}$$

denklemlerini sağladığı anlamına gelir.
(a) Serbest enerjinin quench ortalamasını $\overline{f_{sn}} = \overline{\min\{\Psi(m)\}_m}$, *düzgün mıknatıslanma ile $m(\mathbf{x}) = m$ semer noktası çözümünü varsayarak* hesaplayın. (Bu varsayımla, rastgele alan, ortalama almanın sonucunda kaybolur ve bu aşamada hiç bir etkisi olmadığına dikkat edin.)
(b) $m(\mathbf{x}) = \bar{m} + \phi(\mathbf{x})$ alarak, ve $\beta\mathcal{H}$'i ϕ'de ikinci mertebeye kadar açarak, salınımları dahil edin.
(c) Yukarıdaki enerji maliyetini Fourier modları $\phi(\mathbf{q})$ cinsinden ifade ediniz.
(d) $\langle\phi(\mathbf{q})\rangle$ ortalamasını ve $\langle|\phi(\mathbf{q})|^2\rangle_c$ değişkesini hesaplayınız, burada $\langle\cdots\rangle$ *sabit bir $h(\mathbf{q})$ için*, her zamanki termal ortalamayı göstermektedir.
(e) Yukarıdaki sonuçları, denklem 1 ile beraber kullanarak, quench ortalama saçılma çizgisi şeklini $S(\mathbf{q}) = \overline{\langle|\phi(\mathbf{q})|^2\rangle}$ hesaplayın.
(f) Serbest enerjiye salınımlardan gelen düzeltmeyi, $\delta f\,[h(\mathbf{q})]$, hesaplamak için, $\phi(\mathbf{q})$ üzerinden Gaussiyan integralleri hesaplayın.

$$\left(\text{Hatırlatma:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\phi d\phi^* \exp\left(-\frac{K}{2}|\phi|^2 + h^*\phi + h\phi^*\right) = \frac{2\pi}{K}\exp\left(\frac{|h|^2}{2K}\right)\right)$$

(g) Denklem 1'yi kullanarak, quench ortalama serbest enerjiye, $\bar{f}$, bir önceki kısımdaki salınımlardan gelen düzeltmeyi hesaplayın. (Düzeltmeleri iki integral şeklinde bırakın.)
(h) Serbest enerjiye salınımlardan gelen düzeltmelerdeki integrallerin tekil t bağımlılığını tahmin edin.
(i) Semer noktası kritik davranışın geçerliliği için üst kritik boyutu, d_u, bulun.

****

3. *Uzun Erimli etkileşimler:* Uzun erimli ferromanyetik

$$\int d^d\mathbf{x} d^d\mathbf{y} \frac{\vec{s}(\mathbf{x})\cdot\vec{s}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d+\sigma}}$$

etkileşimleri ile kısa erimli etkileşimlere maruz kalan sürekli $\vec{s}(\mathbf{x})$ spin alanlarını düşünün.
(a) Landau-Ginzburg açılımındaki ikinci mertebe terim, uzun erimli etkileşimlerin varlığında nasıl değişir? σ'nın hangi değerlerinde, uzun erimli etkileşimler belirleyicidir?
(b) Termal olarak uyarılmış Goldstone modlarının genliklerini tahmin ederek (veya başka şekilde), daha düşük boyutlarda uzun erimli düzenin olmadığı alt kritik boyutu d_ℓ elde edin.
(c) Daha yüksek boyutlarda, semer noktası yaklaştırmasının faz geçişimi doğru olarak tasvir ettiği üst kritik boyutu bulun.

****