

Adam S. Bolton
bolton@mit.edu

1 Mayıs 2002

MIT 8.02, Bahar 2002 Ödev # 9 Çözümler

Problem 9.1

Radyo dalgalarının dalgaboyu. (Giancoli 32-37.)

Kanal 2 :

$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{3,00 \times 10^8}{54,0 \times 10^6} = 5,56 \text{ m}$$

Kanal 69:

$$\lambda_{69} = \frac{c}{f_{69}} = \frac{3,00 \times 10^8}{806 \times 10^6} = 0,372 \text{ m}$$

Problem 9.2

İlerleyen elektromanyetik dalgalar.

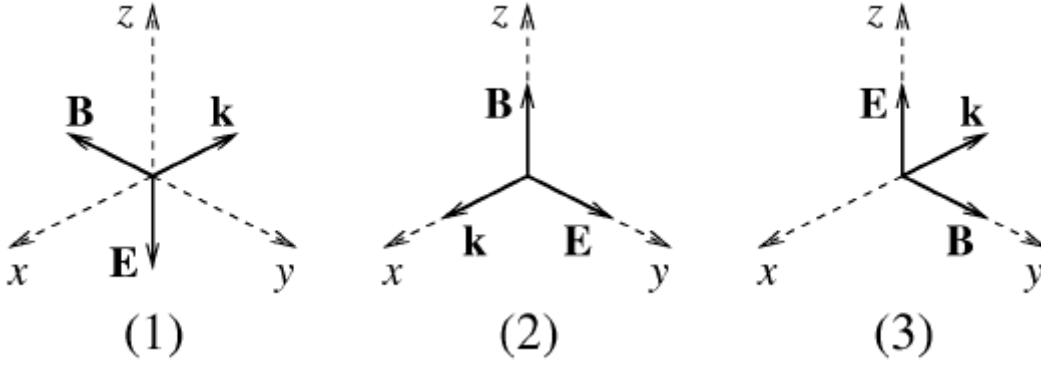
Her üç durumda da elektrik alan,

$$E(x, t) = E_0 \sin(kx \pm \omega t + \alpha),$$

biçiminde verilmektedir, burada \mathbf{E}_0 yayılma yönüne (x –yönü) diktir ve $\alpha = 0$ veya $\pi/2$ 'dir ($\sin(\theta + \pi/2) = \cos\theta$ olduğunu hatırlayınız). Böyle bir dalga için, yayılma yönü eğer parantez içindeki terim ($kx - \omega t + \alpha$) ise $+\hat{x}$ ve eğer parantez içindeki terim ($kx + \omega t + \alpha$) ise $-\hat{x}$ yönündedir. k dalgasayısı, $\lambda = 2\pi/k$ dalga boyu, $f = \omega/2\pi$ Hertz olarak frekans, $v = \omega/k$ hız ve $n = c/v$ kırılma indisidir. Verilen ifadeler ve tanımlardan (a)–(e) için cevaplarımızı listeleyebiliriz:

	yayılma yönü	λ (m)	k (m^{-1})	f (Hz)	v (m/s)	n
durum (1)	$-\hat{x}$	4,00	1,57	$7,50 \times 10^7$	$3,00 \times 10^8$	1,0
durum (2)	$+\hat{x}$	2,00	3,14	$1,50 \times 10^8$	$3,00 \times 10^8$	1,0
durum (3)	$-\hat{x}$	1,00	6,28	$2,13 \times 10^8$	$2,13 \times 10^8$	1,4

(f) \mathbf{B} 'ye eşlik eden denklemleri oluşturmak için bir ilerleyen düzlem EM dalganın iki özelliğini hatırlamalıyız: (i) \mathbf{E} ile \mathbf{B} arasındaki faz ve (ii) $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ vektörünün yayılma yönünü gösterecek şekilde \mathbf{B} 'nin hem \mathbf{E} 'ye hem de yayılma yönüne dik olmasıdır. \mathbf{k} vektörü yayılma yönünü gösterirse, üç durumumuz aşağıdaki yönelimlere sahip olmalıdır:



Büyükklüklere gelince: $B = E/v = nE/c$ 'dir. Böylece üç durumda manyetik alan ifadelerimiz (B , Tesla cinsinden);

$$\text{durum (1): } B_y = (-8,33 \times 10^{-8}) \sin(1,57x + 4,71 \times 10^8 t), \quad B_x = B_z = 0$$

$$\text{durum (2): } B_z = (1,67 \times 10^{-7}) \cos(3,14x - 9,42 \times 10^8 t), \quad B_x = B_y = 0$$

$$\text{durum (3): } B_y = (1,87 \times 10^{-7}) \cos(6,28x + 1,34 \times 10^9 t), \quad B_x = B_z = 0$$

olur.

(g) Durum (3) için anlık Poynting vektörü, Giancoli (32-18), s. 801'den:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{\mu_0} E_z B_y \hat{x} \\ &= -\frac{(40)(1,87 \times 10^{-7})}{4\pi \times 10^{-7}} \cos^2(6,28x + 1,34 \times 10^9 t) \hat{x} \\ &= (-6,0) \cos^2(6,28x + 1,34 \times 10^9 t) \hat{x} \end{aligned}$$

dır. $\cos^2(A + Bt)$ 'nin zaman ortalaması herhangi bir A ve B için $\frac{1}{2}$ 'dir; bu yüzden tüm konumlar için Poynting vektörünün zaman ortalaması (iki özelliği de içeren)

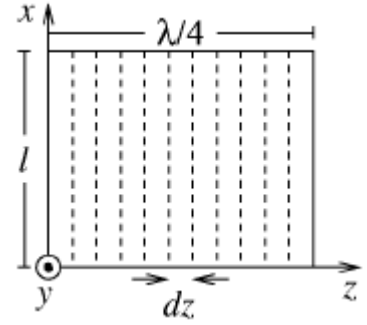
$$\bar{\mathbf{S}} = (-3,0) \hat{x} \quad (\text{birimler: saniyede metrekare başına Joule})$$

olur. Böylece, bu ilerleyen elektromanyetik dalganın uzay boyunca $-\hat{x}$ yönünde enerji aktaracağını bulduk.

Problem 9.3

EM dalgalar-Maxwell denklemleri ve “ışığın hızı”.

Verilen düzlem yüzeyine (A_1 alanı) ve onu kuşatan dikdörtgen halkaya Faraday Yasasını uygulamak istiyoruz. Açıklık için, yüzeyin normalini $+\hat{y}$ yönünde alacağız. Φ_B 'yi hesaplamak için, yüzeyi şekilde görüldüğü gibi, dz kalınlıklı birçok şerite böleceğiz. Her bir şerit, akıya



$$d\Phi_B = B_y dA = B_0 \cos(kz - \omega t) l dz.$$

diferansiyel katkısını yapacaktır.

Bu durumda toplam akı,

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = B_0 l \int_0^{\lambda/4} \cos(kz - \omega t) dz = \frac{B_0 l}{k} [\sin(k\lambda/4 - \omega t) - \sin(-\omega t)].$$

ile verilir. $k\lambda/4 = k(2\pi/k)/4 = \pi/2$ olduğundan,

$$\Phi_B = \frac{B_0 l}{k} [\cos(\omega t) + \sin(\omega t)] \rightarrow -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{B_0 l \omega}{k} [\sin(\omega t) - \cos(\omega t)]$$

elde edilir. Şimdi $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 'yi hesaplayalım. Yüzeyin normalini ($-\hat{y}$ 'ye zıt olarak) $+\hat{y}$ yönünde seçmemiz, şekle bakıldığında, çizgi integralimizi saatin tersi yönünde almamıza zorlar. \mathbf{E} sadece \hat{x} yönünde olduğundan, integral eğrisinin alt ve üst kenarları boyunca $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 'dir. Bu bize,

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^l E_x(z = \lambda/4, t) dx + \int_0^l E_x(z = 0, t) dx \\ &= E_0 \sin(\omega t) \int_0^l dx + E_0 \cos(\omega t) \int_0^l dx \\ &= E_0 l [\sin(\omega t) - \cos(\omega t)]. \end{aligned}$$

verir. Faraday Yasası $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -d\Phi_B/dt$ olduğunu söyler. Bu, gözönüne alınan durum için,

$$E_0 l [\sin(\omega t) - \cos(\omega t)] = \frac{B_0 l \omega}{k} [\sin(\omega t) - \cos(\omega t)]$$

eşitliğini verir. $E_0 = B_0 \omega/k$ ise, bu daima sağlanacaktır. $c = \omega/k$ dalga hızının verilmesiyle, Faraday yasasının bir sonucu olarak, $B_0 = E_0/c$ sonucunu elde ederiz.

Bunu, derste Amper yasasından elde ettiğimiz $B_0 = \epsilon_0 \mu_0 c E_0$ ile birleştirerek, ışığın boşluktaki hızının $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ olduğu sonucunu çıkarırız.

Problem 9.4

Bir Duran Elektromanyetik Dalga.

(a) $\cos(kz)\cos(\omega t)$ biçimindeki herhangi bir duran dalga, $2\pi/k$ dalgaboyuna ve $\omega/2\pi$ Hertzlik bir frekansa sahiptir. Bizim dalgamız için, $k = 2\sqrt{3} \text{ cm}^{-1}$ ve $\omega = 7,0 \times 10^{10} \text{ rad/s}$ 'dir. Böylece

$$\lambda = 1,814 \text{ cm}, \quad f = 1,114 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

olur.

(b) Ortamın kırılma indisi,

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\omega/k} = \frac{(3,00 \times 10^{10} \text{ cm/s})}{(7,0 \times 10^{10} \text{ s}^{-1})/(2\sqrt{3} \text{ cm}^{-1})} = 1,48$$

olarak bulunur.

(c) \mathbf{B} 'yi bulmak için \mathbf{E} -alanını, biri $+\hat{z}$ yönünde ve diğeri $-\hat{z}$ yönünde ilerleyen iki dalganın lineer üstüste binmesi olarak düşünürüz.

$$2\cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

trigonometrik özdeşliği kullanarak, \mathbf{E} -alanını tekrar aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} E_0 \hat{x} [\cos(2\sqrt{3}z - 7,0 \times 10^{10}t) + \cos(2\sqrt{3}z + 7,0 \times 10^{10}t)]$$

Şimdi, problem 9.2(f)'de tartışılan kuralı kullanarak, $+\hat{z}$ yönünde ilerleyen dalgaya eşlik eden \mathbf{B} -alanının, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, $+\hat{z}$ yönününü gösterecek şekilde, $+\hat{y}$ yönünde (E_0 pozitif varsayılarak) olması gerektiği sonucuna varırız. Benzer bir şekilde, $-\hat{z}$ yönünde ilerleyen dalga için \mathbf{B} , $-\hat{y}$ yönünü göstermelidir. Böylece toplam \mathbf{B} -alanımız,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} B_0 \hat{y} [\cos(2\sqrt{3}z - 7,0 \times 10^{10}t) - \cos(2\sqrt{3}z + 7,0 \times 10^{10}t)]$$

olmalıdır.

$$2\sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

özdeşliğini kullanarak,

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{y} \sin(2\sqrt{3}z) \sin(7,0 \times 10^{10}t)$$

olarak yazabiliriz.

Bir duran dalgada, uzay ve zaman içerisinde \mathbf{E} ile \mathbf{B} arasında 90° 'lik faz farkı olduğunu görürüz. B_0 değeri,

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{E_0}{v} = \frac{nE_0}{c}$$

ile E_0 'a bağlıdır.

(d) Uzayda herhangi bir noktada bu dalganın anlık Poynting vektörü $\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/\mu_0$, $\mathbf{S} \propto \sin(\omega t) \cos(\omega t)$ biçiminde zamana bağlı olacaktır. Zaman içerisinde tam bir periyot üzerinden $\sin(\omega t) \cos(\omega t)$ 'nin ortalaması sıfırdır; bu yüzden bütün noktalarda $\bar{\mathbf{S}} \equiv \mathbf{0}$ 'dır. Bu sonuç bize, duran elektromanyetik dalgaların uzayda enerji taşımadığını söyler. Bu sonucu, burada, *ilerleyen* elektromanyetik dalganın enerji taşıdığını bulduğumuz (9.2)'nin sonucu ile karşılaştırınız.

Problem 9.5

Elektromanyetik radyasyonun kutuplanması.

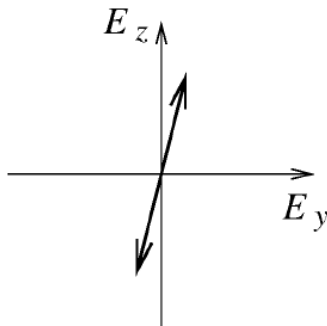
(a) Eğer $x = 0$ alırsak, elektrik alanlarımız zamanla,

$$(1): E_y = -E_0 \sin(\omega t) \quad E_z = -4E_0 \sin(\omega t)$$

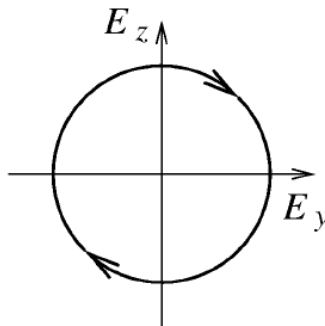
$$(2): E_y = -E_0 \cos(\omega t) \quad E_z = E_0 \sin(\omega t)$$

$$(3): E_y = 2E_0 \sin(\omega t) \quad E_z = 2E_0 \sin(\omega t)$$

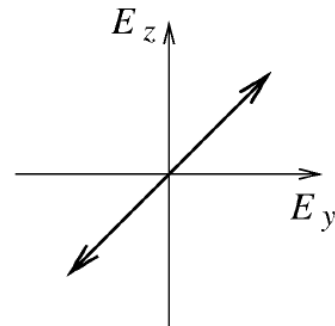
şeklinde değişir. Şimdi $x = 0$ 'da zamanın bir fonksiyonu olarak \mathbf{E} 'nin grafiğini çizebilir ve kutuplanmayı kolayca görebiliriz (not: eksenler ölçekli değildir):



(1) Doğrusal



(2) Dairesel



(3) Doğrusal

(b) Vakumda olduğumuzdan, \mathbf{B} 'nin genliği elektrik alan genliğinin c 'ye bölümüyle verilir. $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 'nin yayılma yönünde olmasını sağlayan yönü elde ederiz. (Şunu söylemek yararlı olur: sırf $y-z$ yönünde olan \mathbf{E} ve \mathbf{B} için, $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \hat{x}(E_y B_z - E_z B_y)$ 'dir.) Bu ifadeleri kullanarak,

$$(1): B_y = (-4E_0/c) \sin(kx - \omega t) \quad B_z = (E_0/c) \sin(kx - \omega t)$$

$$(2): B_y = (E_0/c) \sin(kx + \omega t) \quad B_z = (E_0/c) \cos(kx + \omega t)$$

$$(3): B_y = (2E_0/c) \sin(kx - \omega t) \quad B_z = (2E_0/c) \cos(kx - \omega t + \pi/2)$$

elde ederiz. (Bütün durumlar için $B_x = 0$ 'dir).

Problem 9.6

Güneşin Işınım Basıncı. (Giancoli 32-29.)

Güneşin toplam güç verimi $P = 3.8 \times 10^{26} \text{ W}$ olsun. Aradaki uzayda soğurmanın ihmal edildiğini varsayarsak, Güneş'te merkezlenmiş r yarıçaplı küresel bir yüzeyi geçen birim zamandaki enerji miktarı da P olacaktır. Bu yüzden Güneşin merkezinden r mesafedeki Poynting akısının zaman ortalaması (birim zamanda birim alan başına enerji),

$$\bar{S}(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

olacaktır. Tam soğurmanın olduğunu varsayarsak, toz parçacıkları $p_{\text{rad}} = \bar{S}/c$ bir ışınım basıncını hissedecektir (Giancoli kesim 32-8, s. 802-803 'e bakınız). Eğer parçacıklar a yarıçapına sahipse,

$$F_{\text{rad}} = \pi a^2 p_{\text{rad}} = \pi a^2 \bar{S}/c = \frac{a^2 P}{4r^2 c}$$

ile verilen dışa doğru (yani Güneşten dışarı doğru) bir kuvveti hissedeceklerdir. Parçacıklar ayrıca Güneşe doğru yönelmiş bir kütleçekim kuvveti hissederler. Eğer ρ parçacığın kütlese yoğunluğu ve M güneşin kütlesi ise, bu kuvvetin büyüklüğü,

$$F_G = \frac{G \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \rho \right) M}{r^2}$$

dir. Kütleçekim kuvvetinin büyüklüğü a^3 ile artarken, ışınım basıncı kuvvetinin büyüklüğü a^2 ile artar. Bu yüzden, daha büyük parçacıklar için içe doğru kütleçekim

kuvveti baskın olurken, çok küçük parçacıklar için, dışa doğru ışınım kuvveti baskın olacaktır. Ölçek, iki kuvvetin tam olarak birbirini dengelediği a_0 parçacık boyutuna göre ayarlanır:

$$\frac{a_0^2 P}{4r^2 c} = \frac{G \left(\frac{4}{3} \pi a_0^3 \rho \right) M}{r^2} \Rightarrow a_0 = \frac{3P}{16\pi G \rho M c}$$

Verilen (birçok !) değeri yerine yazarsak,

$$a_0 = \frac{3(3,8 \times 10^{26})}{16\pi(6,67 \times 10^{-11})(2,0 \times 10^3)(1,99 \times 10^{30})(3,00 \times 10^8)} = 2,85 \times 10^{-7} m$$

elde ederiz. Bundan daha küçük yarıçaplı toz parçacıkları ışınım basıncı ile itilecektir.

Problem 9.7

Snell Yasası'nın Uygulaması \Rightarrow *Dağıtma !* (Giancoli 33-46.)

Giancoli Şekil 33-26 (s. 825)'den, silikat billur camın ilgilenilen iki dalgaboyu için kırılma indisi değerleri yaklaşık olarak elde edilebilir:

$$\lambda_1 = 450 \text{ nm}: n \simeq 1,64$$

$$\lambda_2 = 650 \text{ nm}: n \simeq 1,62$$

Şimdi, iki ışından birini düşünün. Sağdaki şekilde görüldüğü gibi, açılar α, β, γ ve δ olarak tanımlansın., n_1 ya da n_2 'den biri n , θ_1 ya da θ_2 'den biri θ olsun. Camı saran ortamın kırılma indisini 1 alacağız. Snell Yasası (Giancoli (33-5) s. 823 eşitliği) bize,

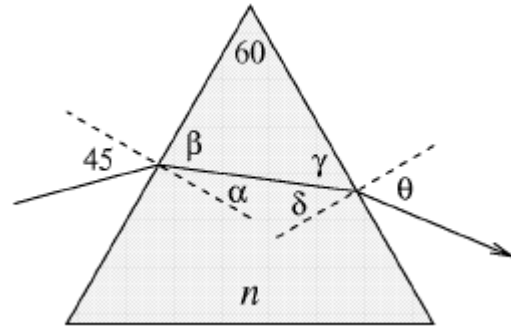
$$\sin(45^\circ) = 1/\sqrt{2} = n \sin \alpha \quad \text{ve} \quad n \sin \delta = \sin \theta.$$

olduğunu söyler. Ayrıca, $\alpha = 90^\circ - \beta$ ve $\delta = 90^\circ - \gamma$, bu nedenle $\sin \alpha = \cos \beta$ ve $\sin \delta = \cos \gamma$ 'dir. Böylece,

$$1/\sqrt{2} = n \cos \beta \quad \text{ve} \quad n \cos \gamma = \sin \theta$$

olur. Son olarak, $\beta + \gamma + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 120^\circ - \beta$ yazabiliriz. Şimdi θ için çözüm,

$$\theta = \arcsin(n \cos \gamma) = \arcsin[n \cos(120^\circ - \beta)]$$



$$= \arcsin \left\{ n \cos \left[120^\circ - \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \right] \right\}$$

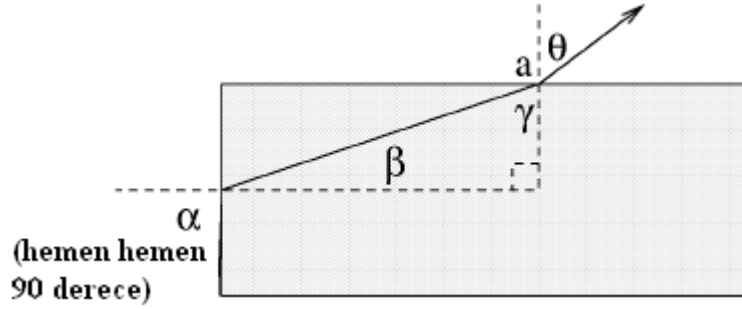
verir. Bu, ilgilendiğimiz iki kırılma indisi için,

$$\theta_1 = 68,1^\circ, \quad \theta_2 = 65,3^\circ$$

verir.

Problem 9.8

Snell Yasası'nın Uygulaması \Rightarrow Fiber Optik ! (Giancoli 33-53.)



İçten tam yansımayı garanti eden fiber optiğimizin yeteneğinin en büyük testi, ışının gelme açısının $\alpha \rightarrow 90^\circ$ olduğu zaman meydana gelecektir. Bu yüzden, özellikle bu durumu ele alalım. Snell Yasası,

$$\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1 = n \sin \beta = n \cos \gamma$$

verir. Şimdi, içten tam yansımanın mutlaka "a" noktasında meydana gelmesi gerekmediğini varsayalım. Çıkan ışının fiber yüzeyin normali ile yaptığı θ açısı Snell Yasası ile verilecektir:

$$\sin \theta = n \sin \gamma = n \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}.$$

Üstteki ifadeden $n \cos \gamma = 1$ 'i kullanılırsa, bu ifade

$$\sin \theta = n \sqrt{1 - 1/n^2} = \sqrt{n^2 - 1}$$

olur. Bu yüzden n arttıkça $\sin \theta$ da artar. $\sin \theta = 1$ ($\theta = 90^\circ$ ye karşılık gelir) "a" noktasında toplam iç yansımanın başlaması için kritik değerdir. Bu nedenle fibere giren tüm ışınların içten tam yansıması için n ,

$$\sqrt{n^2 - 1} > 1 \Rightarrow n > \sqrt{2} \approx 1,42$$

Koşulunu sağlamalıdır. Burada, sadece güvenli olması için yuvarladık.

SON