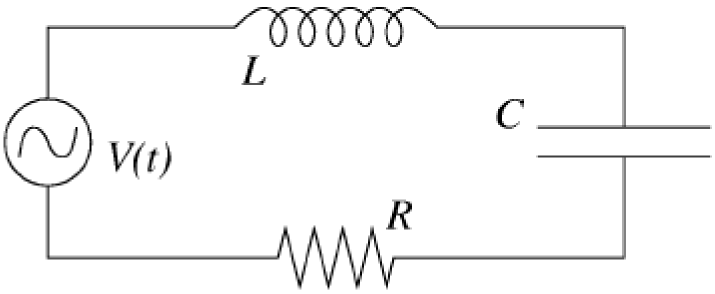
Adam S. Bolton
bolton@mit.edu

24 Nisan 2002

MIT 8.02, Bahar 2002
Ödev # 8 Çözümler

Problem 8.1

RLC devresi.



$L = 15\ \mathrm{m}H$

$R = 80\ \Omega$

$C = 5\ \mu\mathrm{F}$

$V(t) = V_0 \sin(\omega t)$

$V_0 = 40\ \mathrm{V}$

(a) Derste (ve Giancoli Kesim 31- 6,s. 780'de) tartışıldığı gibi, bir RLC devresinde, akımın bir maksimuma (rezonans) ulaştığı sürücü frekans,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0{,}015)(5 \times 10^{-6})}} = 3651{,}5\ \mathrm{rad/s}$$

dır.

(b) Giancoli Kesim 31-5 (ss.776-779)'den,

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \phi) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

elde ederiz.

(*Not: Giancoli devrede akım $I(t) = 0$ olduğu zaman $t = 0$ anlaşmasını benimser. Bu problemde bizim anlaşmamız, kaynak voltajı $V(t) = 0$ olduğu zaman $t = 0$ almaktır. Böylece, Giancoli'nin sonuçlarını bizim durumumuza uygulamak için, $\omega t_{Giancoli} = \omega t_{biz} - \phi$'e göre, zamanla orijini kaydıracağız.*)

Böylece,

ω	$\omega\ (rad/s)$	$\frac{1}{\omega C}\ (\Omega)$	$\omega L(\Omega)$	$\sqrt{R^2\ (\omega L-\ 1/\omega C)^2}\ (\Omega)$	$I_0(A)$
0,25 ω_0	913	219	13,7	220	0,18
ω_0	3651	54,8	54,8	80	0,50
$4\omega_0$	14606	13,7	219	220	0,18

değerlerini elde ederiz.

(c) $\omega = \omega_0,\ \omega L = 1/\omega C$ için doruk akımı ve doruk kaynak voltajı arasındaki faz açısı ϕ sıfırdır. (Giancoli Eşitlik (31-10a), s. 778'e bakınız). Bu,

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\sin\omega_0 t$$

yi verir.

$I = dQ/dt$ olduğundan, kondansatör üzerindeki yük için

$$Q(t) = -\frac{V_0}{\omega_0 R}\cos\omega_0 t$$

buluruz.

("integrasyon sabiti" sıfır olmak zorundadır: devre davranışı için çözümümüzde kondansatör voltajı ve dolayısıyla kondansatör üzerindeki yükün tamamen zamanla sinüzoidal olduğu varsayılmıştır.) Böylece,

$$U_c(t) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{V_0^2}{2\omega_0^2 R^2 C}\cos^2(\omega_0 t) = \frac{V_0^2 L}{2R^2}\cos^2(\omega_0 t)$$

$$= (0{,}0019)\cos^2(\omega_0 t)\ \ Joule$$

$$I(t) = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{V_0^2 L}{2R^2}\sin^2(\omega_0 t)\ \ Joule$$

$$= (0{,}0019)\sin^2(\omega_0 t)\ \ Joule$$

Problem 8.2

LRC devresinde boşa harcanan ortalama güç.(Giancoli 31-20)

(çözüm yazarının görüşüne göre, bu problemde ani güç $P = IV$ "güç kaynağı tarafından beslenen güç" olarak ifade edilmelidir, "devrede boşa harcanan güç" olarak değil.)

$I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ ve $V = V_0 \sin(\omega t + \phi)$'dan,

$P = IV = I_0 V_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t + \phi)$

elde ederiz.

Daha sonra

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

trigonometrik özelliğin kullanılması,

$P = I_0 V_0 [\sin^2(\omega t) \cos\phi + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin\phi]$

yi verir. $\sin(\omega t) \cos(\omega t)$'nin ortalaması sıfır iken, $\sin^2(\omega t)$'nin bir periyot üzerinden ortalaması $1/2$'dir. Böylece söylendiği gibi,

$\bar{P} = \frac{1}{2} I_o V_0 \cos\phi$

elde ederiz.

Problem 8.3

*Rezonans doruğunun genişliği. (*Giancoli 31-30)

(*Not: önceki gösterime uygun olması için, problemin ifadesinde, gerçekten $I_0 = \frac{1}{2} I_{0,maks}$ olduğu iki frekans arasındaki fark sorgulanmalıdır.)*

Problem 8.1(b)'nin sonuçları $\omega = \alpha\omega_0$ ve $\omega = \alpha^{-1}\omega_0$ sürücü frekanslarının aynı doruk akımı I_o'ı vereceğini belirtmektedir. I_o ifadesini $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ kullarak yeniden yazarsak bunu açıkça görebiliriz:

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{V_0}{R\sqrt{\left(1 + \frac{L}{R^2 C}(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)\right)^2}}$$

Şimdi, rezonans tepesinin her iki tarafındaki iki sürücü frekans ω_+ ve ω_- olsun. Bu frekanslarda $I_0 = \frac{1}{2} I_{0,maks} = \frac{1}{2} V_0/R$'dır. (??) nın ışığında, onlar aynı α için ω_0'a $\omega_+ = \alpha\omega_0$ ve $\omega_- = \alpha^{-1}\omega_0$ ifadeleriyle bağlıdırlar. Rezonans doruğu keskinse, $I_0(\omega)$, ω_0'ın her iki yanında çok hızlı düşer, ve böylece ω_+ ve ω_- rölatif olarak ω_0'a çok yakın olmalıdır. Böylece $\delta \ll 1$ olmak üzere, $\alpha = 1 + \delta$ alabiliriz. Bu, $\omega_+ = (1+\delta)\omega_0$ $\omega_- = (1+\delta)^{-1}\omega_0 \approx (1-\delta)\omega_0$ ve $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- \approx 2\delta\omega_0$ verir. $\omega = \omega_+$ yada ω_- için,

$$\left(\frac{\omega_\pm}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_\pm}\right)^2 \approx \left((1\pm\delta) - \frac{1}{(1\pm\delta)}\right)^2 \approx (\pm 2\delta)^2 = 4\delta^2 \approx \frac{(\Delta\omega^2)}{\omega_0^2} = LC\,(\Delta\omega)^2 \ . \ (2)$$

olur. Şimdi (??) yerine (??) koyarak $\Delta\omega$'ı bulabiliriz:

$$I_0 = \frac{1}{2} I_{0,maks} \Rightarrow \frac{V_0}{R\sqrt{1 + \frac{L^2}{R^2}(\Delta\omega)^2}} \approx \frac{V_0}{2R}$$

Bu, gösterdiğimiz gibi $\Delta\omega$'yı bulmak üzere kolayca çözülür.

$$\Delta\omega \approx \frac{\sqrt{3}R}{L} \ .$$

Problem 8.4

Bir tel üzerinde ilerleyen dalgalar.

(a) $$y = a\sin(kx - \omega t)$$

biçiminde herhangi bir ilerleyen dalga için a genlik, k dalga sayısı, $\lambda = 2\pi/k$ dalgaboyu, ω saniyedeki radyan cinsinden frekans ($f = \omega/2\pi$ Hertz cinsinden frekansdır.), $T = 2\pi/\omega$ periyot ve $v = \omega/k$ dalganın hızıdır. Bizim dalgamız için,

$y = 0{,}4\sin[\pi(0{,}5x - 200t)]$ (x, y cm ve t s cinsinden)

olup sayısal değerlerimiz;

$$a = 0.4\ cm$$
$$\lambda = 2\pi/k = 4\ cm$$
$$w = 200\pi = 628\ rad/s$$
$$(f = w/2\pi = 100\ Hz)$$
$$T = 2\pi/\omega = 0.01\ s$$
$$v = \omega/k = 400\ cm/s$$

dir.

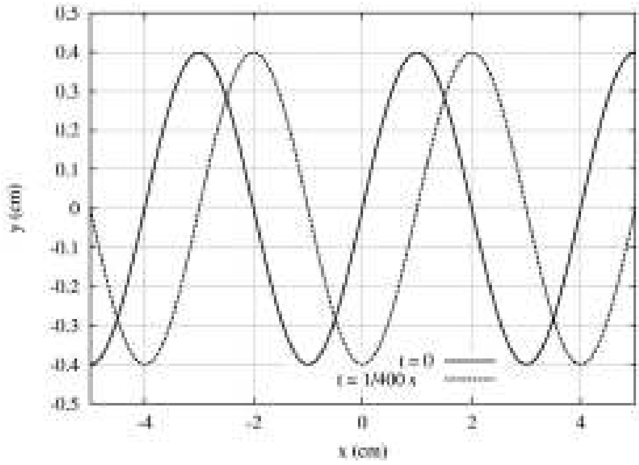
(b) $t = 0$'da dalga denklemimiz;

$$y(x,t)|_{t=0} = 0{,}5\sin(1{,}57x)$$

$t = 1/400\,s\ (= T/4)$'de denklem

$$y(x,t)|_{t=1/400} = 0{,}5\sin(1{,}57x - \pi/2) = -0{,}5\cos(1{,}57x).$$

olur. Bu iki zaman için y'nin x'e göre grafiği aşağıda verilmiştir.



(c) Sicim üzerindeki bir noktanın enine (y-yönünde) hızı:

$$\frac{dy}{dt} = a\omega\cos(kx - \omega t),$$

ve maksimum değeri,

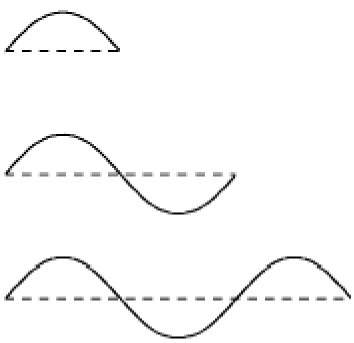
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{maks} = a\omega = 251\,cm/s\,.$$

dir.

(d) Eğer sicimi L aralıklı iki noktadan kıskaçlarsak ve yukarıdaki ile aynı dalgaboylu bir duran dalgayı gözlemlersek, L, yarım dalgaboyunun tam katları olmalıdır:

$$L = n\lambda/2 \quad (n = 1,2,3,4,\ldots)$$

$\lambda = 4\ cm$ değerimiz için, ilk üç olası durum:



$n = 1$ $L = 2$ cm

$n = 2$ $L = 4$ cm

$n = 3$ $L = 6$ cm

dur. Eğer L $10\ cm$'den kesinlikle daha kısa ise, L için mümkün dört değer: $2\ cm, 4cm, 6cm$ ve $8\ cm$'dir.

Problem 8.5

Bir tel üzerinde duran dalgalar.

(a)
$$y = a \sin(kx) \cos(\omega t)$$

biçimindeki bir duran dalga, yukarıda 8.3(a)'da verildiği gibi, aynı dalgaboyuna sahiptir. Böylece,

$y = 0{,}3 \sin(3x) \cos(1200t)$

için x, y'yi santimetre, t'yi saniye cinsinden alırsak,

$$k = 3\ cm^{-1}$$

$$\lambda = 2\pi/k = 2{,}1\ cm$$

$$\omega = 1200\ rad/s$$

$$(f = \omega/2\pi = 191\ Hz)$$

$$T = 2\pi/\omega = 5{,}24 \times 10^{-3} s$$

elde ederiz.

(a) İlgilenilen zamanlar,

$$t = 0, t = 1{,}31 \times 10^{-3}\ s = T/4 \text{ ve } t = 2{,}62 \times 10^{-3} s = T/2$$

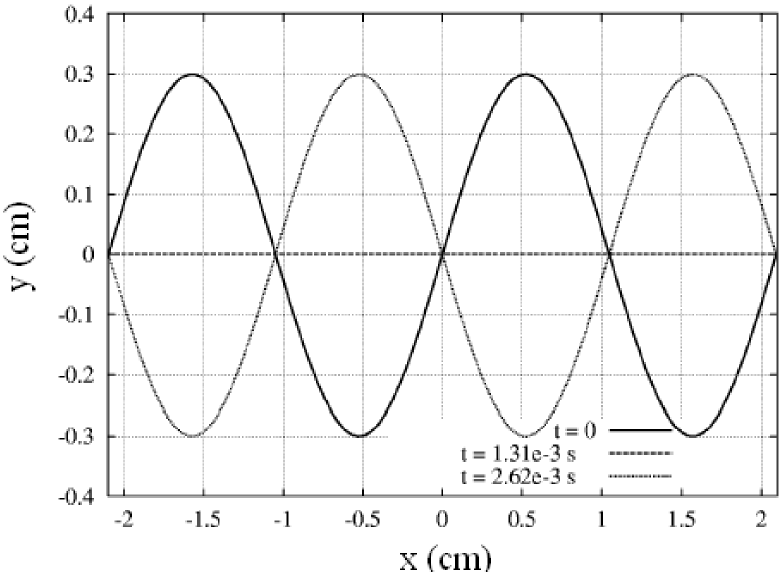
dır.

$$y(x,t)|_{t=0} = 0{,}3 \sin(3x)$$

$$y(x,t)|_{t=1{,}31\times 10^{-3}} = 0{,}3 \sin(3x) \cos(\pi/2) \equiv 0$$

$$y(x,t)|_{t=2{,}62\times 10^{-3}} = 0{,}3 \sin(3x) \cos(\pi) = -0{,}3 \sin(3x)$$

Buradaki bu üç zaman için y'nin x'e göre grafiği aşağıda gibidir.



Problem 8.3 deki ilerleyen dalganın değişimi ile duran dalganın değişimini karşılaştırınız.

(b) 8.3(c) de olduğu gibi, maksimum enine hız

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{maks} = a\omega = 360\ cm/s$$

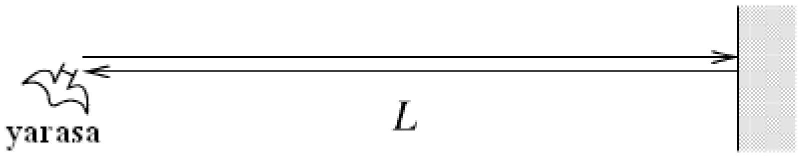
(c) İki yoldan biriyle bu soru yorumlanabilir. Eğer "yayılma hızı" ile faz hızını söylemek istiyorsak, o zaman,

$$v = \omega/k = 400\ cm/s$$

olur. Diğer taraftan, eğer sicim boyunca bu *özel* dalga biçiminin (duran dalga) ilerleme hızından bahsediyorsak, o zaman o sıfırdır. (yukarıda (b)'deki grafiğe bakınız).

Problem 8.6

Ses ile mesafe algılaması.



(a) Bir yarasa pulsunun L metre uzakta bir duvara gidip geri dönmesi arasındaki T zamanı $T = 2L/v_a$'dır. Burada v_a sesin havadaki hızıdır. Böylece bir $T = 2\Delta L/v_a$ zaman belirsizliğine ΔL mesafe belirsizliği karşılık gelir. $\Delta L = \pm 0{,}2\ m$ ve $v_a = 344\ m/s$ ($20°C$ de $1\ atm$ de) için,

$\Delta T = \pm 1{,}2 \times 10^{-3} s$

yazabiliriz.

(b) Metan dolu mağaramızdaki yarasanın, $L_{gerçek}$ mesafesine bir atma (puls) gönderdiğini varsayalım. Yarasa $T = 2L_{gerçek}/v_m$ süre sonra yansımış sinyali alacaktır; burada v_m, sesin metandaki hızıdır. Eğer yarasa hava içerisinde bulunduğunu algılarsa, bu zaman gecikmesini belirli bir mesafeden dolayı gecikme olarak yorumlayacaktır:

$$L_{algılanan} = \frac{v_a T}{2} = \frac{v_a}{v_m} L_{gerçek}$$

$v_a = 344\ m/s$ ve $v_m = 432\ m/s$ için

$L_{algılanan} = 0{,}8 L_{gerçek}$.

olur. Böylece yarasa, sinyal onun beklediğinden daha hızlı geri döneceğinden, $0{,}8$ çarpanı kadar eşyaları gerçek uzaklığından daha yakındaymış gibi algılayacaktır.

Problem 8.7

Bir flüt tasarlayın.

(a) Sistem temel kipte titreştiği zaman, tüpün (flütün) boyu (açık açık) dalga boyunun yarısıdır. Böylece flüt uzunluğu $L = \lambda/2$ olmalıdır. Dalga boyu, $L = v_a/2f$ olacak şekilde, frekans f (Hertz cinsinden) ve ses hızı v_a'na $f\lambda = v_a$ veya $\lambda = v_a/f$ ile bağlıdır. $f = 261{,}7$ Hz ve $v_a = 344\ m/s$ için

$L = 0{,}657$ metredir.

(b) Modern bir eşit-akort ölçeği için, verilen herhangi bir notanın frekansı yarım basamak aşağıdaki notanın frekansının $\sqrt[12]{2} \cong 1{,}0595$ katıdır (ayrıca nota frekansları tablo halinde bulunabilir). Bu bize, $L = v_a/2f$'den her bir nota için gerekli etkin tüp uzunluklarını hesaplama imkanı verir ve böylece anahtar aralıklarına karşılık gelen ΔL aşağıdaki tablodaki gibi olur:

Note	f (Hz)	L (m)	ΔL (m)
C	261.7	0.657	(0)
$C\sharp/D\flat$	277.3	0.620	0.037
D	293.7	0.586	0.034
$D\sharp/E\flat$	311.2	0.553	0.033
E	329.7	0.522	0.031
F	349.3	0.492	0.030
$F\sharp/G\flat$	370.1	0.465	0.027
G	392.1	0.439	0.026
$G\sharp/A\flat$	415.4	0.414	0.025
A	440.1	0.391	0.023
$A\sharp/B\flat$	466.3	0.369	0.022
B	494.0	0.348	0.021
C	523.4	0.329	0.019

(Not: ΔL' nin oldukça yavaş ilerlemesi yuvarlama hatasından dolayıdır.)

SON