Adam S. Bolton
bolton@mit.edu

17 Nisan 2002

MIT 8.02, Bahar 2002
Ödev # 7 Çözümler

Problem 7.1

İdeal transformatör. (Giancoli 29-42)

Transformatörün birincil (giriş) sargısına bağlanmış bir voltmetrenin voltajı V_1 ve ikincil (çıkış) sargısına bağlanmış bir voltmetrenin okuduğu çıkış voltajı V_2 olsun. Ayrıca N_1, $\Phi_{B,1}$ ve N_2, $\Phi_{B,2}$ sırasıyla, birincil ve ikincil bobinlerin sarım sayıları ve sarım başına manyetik akıları olsun. Faraday Yasasının sargı boyunca bir sarıma uygulanması ve voltmetre (her bir sarım için),

$$V_1 = N_1 \frac{d\Phi_{B,1}}{dt}$$

$$V_2 = N_2 \frac{d\Phi_{B,2}}{dt}$$

verir. İdeal bir transformatörde $\Phi_{B,1} = \Phi_{B,2}$ dir ve bu nedenle,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \tag{1}$$

yazabiliriz. İdeal bir transformatörün diğer bir özelliği, birincil sargıya bağlanmış bir dalgalı akım (A.C.) üreteci tarafından sağlanan tüm gücün ikincil sargıya bağlanmış bir yük tarafından alınmasıdır (enerji kaybı yok):

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \tag{2}$$

(1) ve (2) birlikte,

$$N_1 I_1 = N_2 I_2$$

verdiğine dikkat edilmelidir. Bu problemde

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 = P = 100\ W$$

ve ayrıca

$$V_2 = 12\ V, \qquad I_2 = 26\ A$$

verilmektedir. Bu,

$$V_1 = P/I_1 = 100/26 \simeq 3{,}85\ W$$

verir.

(a) $V_2 > V_1$ olduğundan bu bir yükseltici transformatördür.

(b) Birincil sargıdan ikincil sargıya aktarılan voltaj (gene, ‘‘bobine bağlı bir voltmetrenin okuduğu değer’’ olarak tanımlanır),

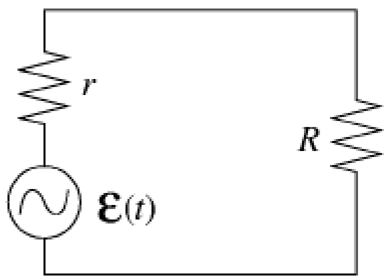
$$V_2/V_1 = V_2 I_1/P = (12)(26)/100 = 3{,}12$$

katı ile çarpılır.

Problem 7.2

Empedans uydurma için transformatör.

(a) Bu kısımda sağda gösterildiği gibi $r = 0{,}4\ \Omega,\ R = 15\ \Omega,\ \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(wt), \varepsilon_0 = 150\ V$ ve $w/(2\pi) = 50\ Hz$ olan basit bir devremiz olsun. Ohm yasasından devredeki $I(t)$ akımı,



$$I(t) = \frac{\varepsilon(t)}{r+R}$$

dır. Yüke aktarılan anlık güç böylece,

$$P_R(t) = RI^2(t) = \frac{R\varepsilon_0^2}{(r+R)^2}\cos^2(\omega t)$$

olur ve ortalama güç (‘‘ortalamanın’’ tanımından),

$$\bar{P}_R = \frac{1}{T}\int_0^T P_R(t)\,dt = \frac{R\varepsilon_0^2}{(r+R)^2}\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt$$

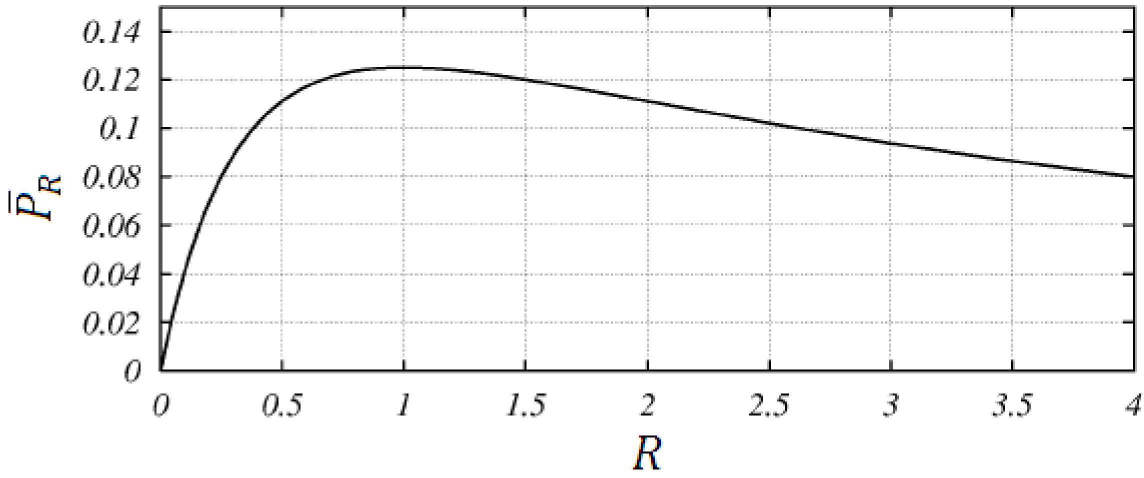
olur (T bir tam devirin periyodudur: $T = 2\pi/\omega$).

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt = \overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\bar{P}_R = \frac{1}{2}\frac{R\varepsilon_0^2}{(r+R)^2}$$

yazabiliriz. R'nin fonksiyonu olarak $\bar{P}_R$'yi gözönüne alırsak, onun $R = r$'de bir maksimuma ulaşacağını kolayca gösterebiliriz. Aşağıda şekil $\bar{P}_R$'nin (ε_0^2/r birimlerinde) R'ye (r birimlerinde) göre grafiğini göstermektedir:

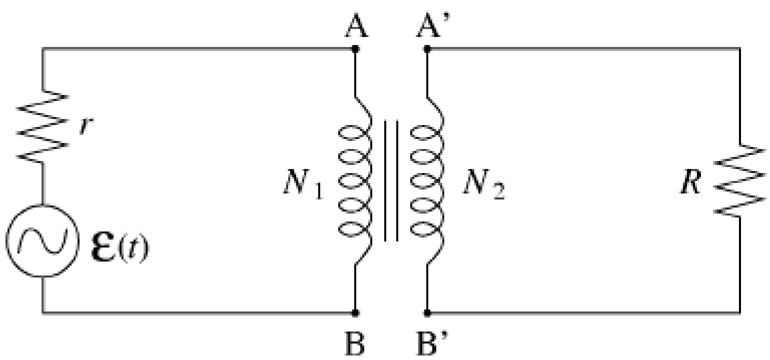


Problemde ifade edildiği gibi, yük "empedensı" (R) üreteç empedansı (r)'ye eşit olduğu zaman, bir yüke maksimum güç aktarılır. Ele alınan durumda $R \gg r$ olduğundan, yüke maksimum güç aktaramayız. R, r ve ε_0 için verilen değerlerimiz,

$$\bar{P}_R = \frac{1}{2}\frac{(15)(150)^2}{(0{,}4+15)^2} \simeq 712\ W$$

verir. Bu, yüke aktarılan olası maksimum güçün oldukça altındadır.

(b) Şimdi empedans uydurmayla yüke aktarılan gücü artırmak istiyoruz. Bunu aşağıda gösterildiği gibi devreye bir transformatör sokarak yapabiliriz.



Problem 1'deki gibi, birincil transformatör sargısının A ve B noktaları arasına bir voltmetre bağlarız ve onun okuduğu voltajı V_1 ile isimlendiririz. Benzer şekilde ikincilin A' ve B' arasına bağladığımız bir voltmetre V_2 olarak isimlendireceğimiz bir voltajı okur. İdeal bir transformatör ve A.C. voltaj kaynağı için aynı anlamda tanımlanmış V_1 ve V_2 problem 1'deki (1) ve (2)'yi sağlayacaktır. Kolaylık için iki sargı arasındaki tur oranını $\alpha \equiv N_1/N_2$ olarak tanımlayacağız. R yüküne aktarılan anlık güç,

$$P_2 = RI_2^2 \qquad (3)$$

dir. I_2 nedir? Diyagramdan,

$V_1 = \varepsilon - rI_1$
yazılabilir. (1) ve (2)'yi kullanarak,

$$\alpha V_2 = \varepsilon - r\, I_2/\alpha$$

olur. $V_2 = RI_2$ (Ohm yasası) olduğundan ,

$$\alpha(RI_2) = \varepsilon - r\, I_2/\alpha$$

yazabiliriz veya I_2 için çözersek

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{(\alpha R + r/\alpha)}$$

elde ederiz. Bunu (3) te yerine yazarsak

$$P_2 = \frac{R\varepsilon^2}{(\alpha R + r/\alpha)^2} = \frac{\alpha^2 R\varepsilon^2}{(r + \alpha^2 R)^2} \qquad (4)$$

elde ederiz. P_2'yi α^2'nin fonksiyonu olarak göz önüne alırsak, α^2'nin bir orta değerinde bir maksimumdan geçsin diye çok küçük α^2 ve çok büyük α^2 nin her ikisi için de küçüktür. Bu değeri bulmak için α^2'ye göre (4)'ün türevini alır ve sıfıra eşitleriz. Bu,

$$R\varepsilon^2\left[\frac{1}{(r + \alpha^2 R)^2} - \frac{2\alpha^2 R}{(r + \alpha^2 R)^3}\right] = 0$$

Veya

$$1 - \frac{2\alpha^2 R}{r + \alpha^2 R} = 0$$

verir. Yüke aktarılan maksimum güç için α^2'ye göre çözüm

$$\alpha^2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{r}{R}} = \sqrt{\frac{0{,}4}{15}} \simeq 0{,}163$$

verir.

(c) P_2'nin uygun maksimum değeri $\alpha^2 = r/R$ yazılarak (4) ten,

$$P_2 = \frac{(r/R)R\varepsilon^2}{(r+(r/R)R)^2} = \frac{r\varepsilon^2}{4r^2} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$$

bulunur.

Bunun zaman ortalaması,

$$\bar{P}_2 = \frac{\varepsilon_0^2}{8r} = \frac{(150)^2}{8(0,4)} \simeq 7030\ W$$

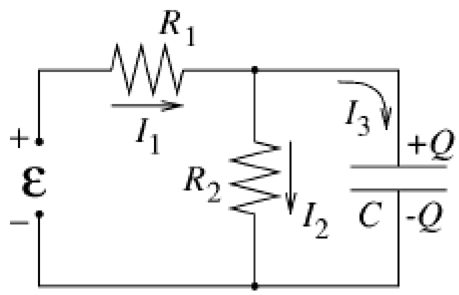
olur. (a) şıkkındaki sonucumuzla bunu karşılaştırın.

Problem 7.3

RC devresi. (Giancoli 26-45).

Kolaylık için akımlar, yükler ve polariteleri sağdaki şekildeki gibi tanımlayınız.

Kirchhof'un ilmek kuralının iki uygulanması, eklem kuralının uygulaması ve akımın tanımı bize aşağıdaki dört denklemi verir:



$$\varepsilon = I_1R_1 + Q/C \tag{5}$$

$$\varepsilon = I_1R_1 + I_2R_2 \tag{6}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{7}$$

$$I_3 = \frac{dQ}{dt} \tag{8}$$

(5)'ten (6)'yı çıkararak,

$$\frac{Q}{C} - I_2R_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{Q}{R_2C}$$

elde ederiz. Bu (7)'de yerine yazılırsa,

$$I_1 = \frac{Q}{R_2C} + I_3$$

I_2 yok edilir. Şimdi bunu (5)'te I_1'in yerine yazarsak,

$$\varepsilon = \left(\frac{Q}{R_2C} + I_3\right)\mathrm{R}_1 + \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C}}$$

$$= \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{Q}{C} + R_1I_3$$

elde ederiz. Son olarak (8)'i kullanarak,

$$\varepsilon = R_1 \frac{dQ}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{Q}{C}$$

buluruz. Şimdi bu basit bir RC devresinde kapasitör üzerindeki yükün diferansiyel denkleminin benzeridir.

$$\varepsilon = R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q$$

yazarak,

$$R \longrightarrow R_1, \qquad C \longrightarrow \frac{C}{1 + R_1/R_2}$$

elde edilir. Böylece problem şimdi Giancoli, Kesim 26-4'da (bakınız ss.669-671) tanımlandığı gibi, basit RC- devresi durumuna benzetilerek çözülür.

(a) Kapasitörün yüklenmesi için "$\tau = RC$" zaman sabiti, (9)'daki yerdeğiştirme kullanılarak,

$$\tau = \frac{R_1 C}{1 + R_1/R_2}$$

bulunur.

(b) Zamanın fonksiyonu olarak kapasitör üzerindeki yük, (9) değişikliği ile, Giancoli (26-5a) Denklemiyle verilecektir:

$$Q(t) = \frac{C\varepsilon}{1 + R_1/R_2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

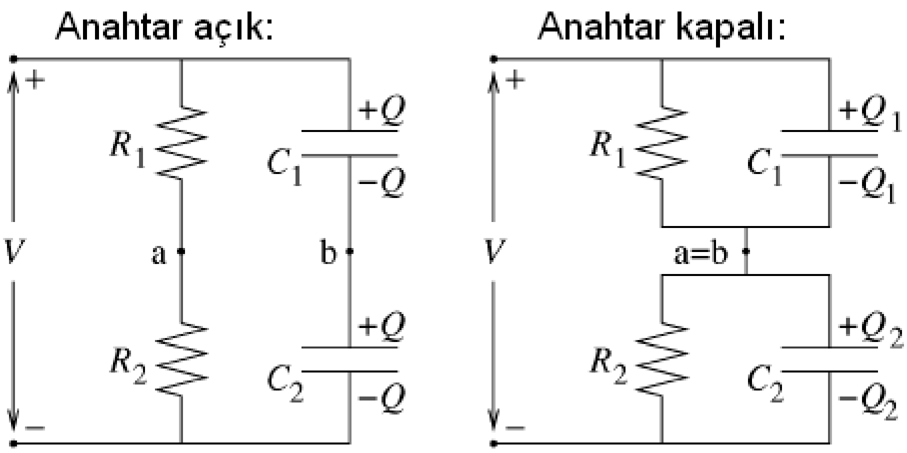
Kapasitör üzerindeki maksimum yük o zaman,

$$Q_{maks} = \lim_{t\to\infty} Q(t) = \frac{C\varepsilon}{1 + R_1/R_2}$$

olur.

Problem 7.4

RC devresi. (Giancoli 26-46).



Sembolleri, cebirsel kolaylık için şekilde gösterildiği gibi tanımlayın. Anahtar - açık ve anahtar - kapalı durumları için etkin devreler gösterilmiştir.

(a) Anahtarın açık ve kapasitörün tamamen yüklü olduğu durumda devrenin kapasitör kolunda akım yoktur. Direnç dalı için

$$V = (R_1 + R_2)I \Rightarrow I = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

yazabiliriz. Kaynağın negatif ucunda voltajımızı sıfır aldığımızda ‘‘a’’ noktasındaki potansiyel basitçe R_2 uçları arasındaki voltaj olacaktır:

$$V_a = IR_2 = \frac{VR_2}{R_1 + R_2} = \frac{(24)(4{,}4)}{8{,}8 + 4{,}4} = 8\ V\ .$$

(b) Açık anahtarlı durumda, iki kapasitör seri bağlı olup eşdeğer kapasitans

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

dır. Her biri levhaları üzerinde aynı $\pm Q$ yüküne sahip olacaktır. Burada

$$Q = CV = V\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

dir. Seçtiğimiz sıfır-noktasına göre ‘‘b’’ deki potansiyel sadece C_2 uçları arasındaki potansiyel olacaktır:

$$V_b = \frac{Q}{C_2} = \frac{VC_1}{C_1 + C_2} = \frac{(24)(0{,}48 \times 10^{-6})}{0{,}48 \times 10^{-6} + 0{,}24 \times 10^{-6}} = 16\ V\ .$$

(c) Anahtar *kapalı* ve kapasitörlerin tamamen yüklenmiş olduğu durumda devredeki tek akım hala her iki dirençten geçen tek I akımıdır. Önceki gibi,

$$V = (R_1 + R_2)I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

dır. Dolayısıyla her bir direnç üzerindeki voltaj aynı kalır. Bununla beraber öncekinin aksine şimdi kapasitörlerin uçları arasındaki voltajlar onlara eşlik eden dirençlerin uçları arasındaki voltajlara eşittir. Devrede "a" ve "b" eşdeğer olarak aynı nokta olmuştur; "b"deki yeni potansiyel, "a" daki potansiyele eşit olup (değişmemiştir) R_2'nin uçları arasındaki voltajdır:

$$V_b' = IR_2 = 8V \qquad \text{((a) şıkkındaki gibi)}$$

(d) Anahtar kapatılmadan önce her iki kapasitör,

$$Q = CV = V\left(\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\right) = \frac{(24)(0{,}48 \times 10^{-6})(0{,}24 \times 10^{-6})}{0{,}48 \times 10^{-6} + 0{,}24 \times 10^{-6}} = 3{,}84\ \mu C$$

yükünü taşır. Böylece C_1'in alt levhası ve C_2'nin üst levhası üzerindeki net yük (bunlar devrenin geri kalan kısımlarından akan yükten yalıtılmışlardır), $-3{,}84\mu c + 3{,}84\mu c = 0$'dır.

Anahtar kapatıldıktan sonra C_2'nin uçları arasındaki voltaj $V_2 = 8\ V$'tur. Bu yüzden iki kapasitör üzerindeki son yükler,

$$Q_1 = C_1V_1 = (0{,}48 \times 10^{-6})(16) = 7{,}68\ \mu C,$$

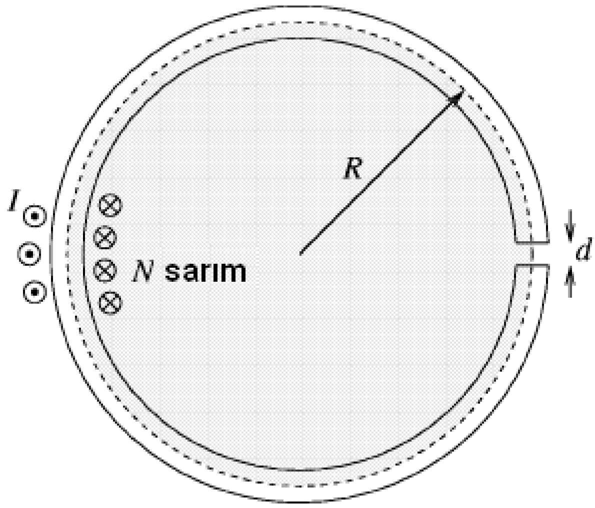
$$Q_2 = C_2V_2 = (0{,}24 \times 10^{-6})(8) = 1{,}92\ \mu C$$

olur. Şimdi C_1'in alt levhası ve C_2'nin üst levhası üzerindeki net yük $-7{,}68\ \mu C + 1{,}92\ \mu C = -5{,}76\ \mu C$ olur. Bu nedenle anahtar kapatıldıktan sonra <u>$-5{,}76\ \mu C$ sağa doğru akacağı</u> sonucuna varırız. (veya sizin bakış açınıza bağlı olarak <u>sola $+5{,}76\ \mu C$ akar</u>!)

Problem 7.5

Küçük hava boşluklu elektromıknatıs.

Manyetik alanın azimutal olduğunu varsayacağız. Çünkü manyetik tek kutup yoktur, B-alanı çizgileri kapalı ilmekler oluşturur ve bu nedenle çok sayıda çizgi boşluktaki hava-çelik ara yüzeyi boyunca sürekli olacaktır. Bu nedenle boşluktaki manyetik alan şiddeti çelikteki manyetik alan şiddetine yaklaşık olarak eşit olacaktır.



Sıfırdan farklı manyetik alınganlığa sahip maddelerde Amper yasası (Maxwell düzeltmesiz),

$$\oint \frac{1}{\kappa_M} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{kapalı\ yüzey}$$

olur. Burada κ_M maddenin bağıl geçirgenliğidir (bakınız Giancoli kesim 28-9 ve 28-10 (ss.724-726) ve $K_M \leftrightarrow \kappa_M$). Kesik çizgili ilmeğe ve gösterilen gölgeli açık yüzeye Amper yasasının bu biçimini uygularsak,

$$\int_{çelik} \frac{1}{\kappa_M} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{boşluk} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 N I$$

elde ederiz. (iyi bir yaklaşıklıkla, havada $\kappa_M = 1$'dir: hava pratik olarak çelikle kıyaslandığında boşluktur). Açık yüzeyimizden geçen toplam akımın, tel yüzeyi N kez kestiğinden dolayı, NI olduğuna dikkat edilmelidir. Bilgilerimizden, havadaki B (yaklaşık olarak) çelik içindeki B ile aynıdır.

$$B\left[\frac{2\pi R - d}{\kappa_M} + d\right] = \mu_0 N I$$

yazabiliriz ve $2\pi R - d \simeq 2\pi R$ olduğundan,

$$B \simeq \frac{\mu_0 N I}{2\pi R/\kappa_M + d} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(120)(15)}{(2\pi)(0{,}07)/2500 + 2{,}5 \times 10^{-3}} \simeq 0{,}85\ \mathrm{T}$$

olur. Burada üzerinde yorum yapmaya değer iki nokta vardır. İlki, boşluktaki B'nin çelikteki B ile aynı olması varsayımımızın, sadece boşluk genişliğinin elektromıknatısın kesit yarıçapıyla (burada ~ 1 cm ile kıyaslandığında 2,5 mm) kıyaslandığında küçük olması durumunda iyi olmasıdır. Gerçekte saçak alanları boşlukta, çeliktekinden daha az manyetik alana sebep olur ve kesit yarıçapıyla kıyaslandığında boşluk genişledikçe problem kötüye gider. İkincisi, $d \ll 2\pi R$ olsa bile

$$\oint \frac{1}{\kappa_M} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}$$

integraline önemli katkı boşluktan gelir, çünkü orada $\kappa_M = 1$'dir. Çelikte *daha uzun* bir yol üzerinden κ_M'nin büyük değeri, çizgi integraline katkıyı boşluğunkinden daha az azaltır.

Problem 7.6

RC devresi.

(a) İlkönce $0 < t < T/2$ zaman aralığını düşünün. Bu zaman aralığı boyunca sürücü voltaj sabittir $(V = V_0)$ ve

$$V_0 = V_R + V_C$$
$$= RI = Q/C$$
$$= R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}.$$

yazabiliriz. $\tau = RC$ alındığında bu diferansiyel denklemin çözümü,

$$Q(t) = CV_0 + Ae^{-t/\tau},$$

olur. Burada *A* integral sabitidir. *A*'yı tayin etmek için başlangıç koşullarını göz önüne alırız. $t < 0$ için $V(t) = 0$ olduğundan, kapasitördeki Q yükü $t < 0$ için sıfırdır ve ayrıca $t = 0$ da da sıfırdır. Bunun gerçek olması için $A = -CV_0$ almalıyız ve böylece,

$$Q(t) = CV_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \text{ için } 0 < t < T/2 .$$

olur. $C/\tau = 1/R$ olduğundan devredeki akım için,

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} \quad (0 < t < T/2)$$

elde ederiz. Kapasitörün uçları arasındaki potansiyel Q/C veya

$$V_C(t) = V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \ (0 < t < T/2) .$$

dir. Kaynak tarafından sağlanan güç (dirençte harcanan güçle karıştırılmamalı!) genelde $P = IV(t)$dir ve bu yüzden ilk yarım periyot boyunca $V(t) = V_0$ için,

$$P(t) = \frac{V_0^2}{R} e^{-t/\tau} \quad (0 < t < T/2)$$

olur.
Şimdi $T/2 < t < T$ zaman aralığını göz önüne alalım. Orada $V(t) = V_0$ yazabiliriz ve Q için denklem,

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

olur. Şimdi genel çözüm ($\tau = RC$),

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \quad (T/2 < t < T),$$

olur. Burada Q belirlenecek bir sabittir. $T/2 < t < T$ ve $0 < t < T/2$ aralıklarında $Q(t)$ için çözümlerimiz $t = T/2$ 'de uyuşmalıdır. Bu durumda,

$$CV_0\left(1 - e^{-T/2\tau}\right) = Q_0 e^{-T/2\tau}$$

yazmalıyız. Şimdi $T = 0{,}3\ s$ de $\tau = RC = (40)(150 \times 10^{-6}) = 6\ \mathrm{ms}$ olur. Böylece $e^{-T/2\tau} \ll 1$ olur ve biz 1'e göre bu terimi ihmal edebiliriz. Dolayısıyla

$$Q_0 = CV_0 e^{+T/2\tau}$$

elde ederiz ve böylece,

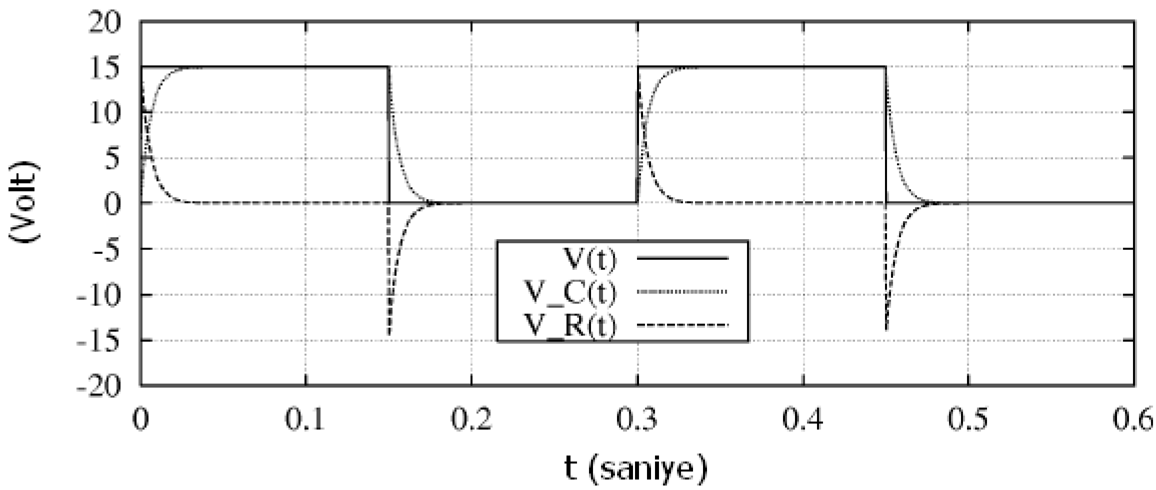
$$Q(t) = CV_0 e^{-(t-T/2)/\tau} \quad (T/2 < t < T)$$

olur. Buradan,

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{V_0}{R} e^{-(t-T/2)/\tau} \quad (T/2 < t < T)$$
$$V_C(t) = Q/C = V_0 e^{-(t-T/2)/\tau} \quad (T/2 < t < T)$$
$$P(t) = IV(t) = 0 \quad (T/2 < t < T)$$

buluruz.

(b) Tam bir periyottan sonra tam eğri kendini tekrarlar. Tam bir periyot üzerinden $V(t), V_c(t)$ ve $V_R(t) = IR$'nin grafikleri aşağıda verilmiştir:



(c) Dirençte harcanan anlık güç I^2R dir; bu nedenle bir periyot boyunca dirençte harcanan enerji,

$$\int_0^T I^2 R dt = 2\int_0^{T/2} I^2 R\, dt$$
$$= 2\frac{V_0^2}{R}\int_0^{T/2} e^{-2t/\tau}\ dt$$
$$= CV_0^2(1 - e^{-T/\tau})$$
$$\simeq CV_0^2$$
$$= (150 \times 10^{-6})(15)^2 \simeq 34 \text{ mJ}$$

olur. Güç kaynağının harcadığı anlık güç $V(t)I$'dır. Güç kaynağı tarafından bir periyot boyunca harcanan toplam enerji, bu yüzden

$$\int_0^T V(t) I dt = \int_0^{T/2} V_0 I\ dt \quad (V(t) = 0 \text{ için } T/2 < t < T)$$
$$= \frac{V_0^2}{R}\int_0^{T/2} e^{-t/\tau}\ dt$$
$$= CV_0^2(1 - e^{-T/2\tau})$$
$$\simeq CV_0^2\ .$$

olur. Böylece tam bir çevrim boyunca güç kaynağında harcanan enerji dirençte ısı olarak harcanan enerjiye eşittir. Bu sonuç, enerji korunumu açısından kaçınılmazdır: bir çevrim boyunca kapasitör yüklenir ve sonra boşalır, bu yüzden kapasitörde bir net enerji dağılımı olmaz ve bir çevrim boyunca güç kaynağı tarafından harcanan *tüm* enerji dirençte harcanmış olmalıdır.

Enerji Bütçesi

Şimdi daha detaylı bir enerji bütçesi çıkarabiliriz: bir çevrimin ilk yarısının sonuna doğru kapasitör esas itibariyle tamamen yüklenir. Bu yüzden o, $\frac{1}{2}QV_0 = \frac{1}{2}CV_0^2$ elektrostatik potansiyel enerjisini içerir. Ardışık boşalma periyot boyunca ($V(t) = 0$ olduğunda) bu enerji ısı formunda dirençten dışarı *atılmalıdır*. Tam bir çevrim boyunca kaybolan toplam enerji CV_0^2 olduğundan, yüklenme periyodu sırasında $\frac{1}{2}CV_0^2$'ye eşit miktarda enerjinin dirençte harcandığı sonucuna varabiliriz. Bu açıktır. Çünkü bir tam devirde (T saniyede) akım-zaman eğrisi özdeş iki akım ‘‘pulsu’’ gösterir. Onların işaretleri farklıdır ama dirençte kaybolan güç I^2 ile orantılı olduğundan bu fark ortadan kalkar.

SON