Adam S. Bolton
bolton@mit.edu

5 Nisan 2002

MIT 8.02, Bahar 2002
Ödev # 6 Çözümler

Problem 6.1

Dönen Bobin.(Giancoli 29-62)

Bobin, yüzü manyetik alana dik olarak başlar (daha bilimsel konuşmak gerekirse, bobin normali manyetik alana paraleldir). İşaret anlaşmamızı, bobinden geçen (yani bobinin sınırladığı açık yüzeyden geçen) manyetik akı başlangıçta $\Phi_{B,i} = NAB$ olacak şekilde seçersek, $180°$ döndükten sonra akı $\Phi_{B,l} = -NAB$ olacaktır. Böylece bobinden geçen akıdaki toplam değişim, dönme boyunca $|\Delta\Phi_B| = 2NAB$ olur.

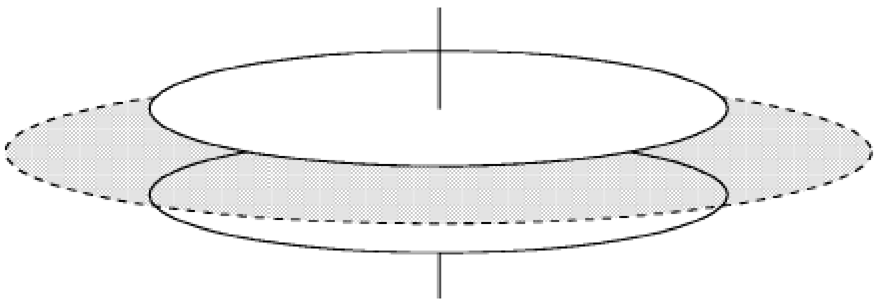
Ohm Yasasını ve Faraday Yasasını birlikte yerine yazıp, akımın birim zamandaki yük akışı tanımını kullanarak;

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = \epsilon = RI = R\frac{dQ}{dt}$$

elde ederiz. $|d\Phi_B| = RdQ$'yu elde etmek için t'yi yok edebiliriz. O, tam bir devir üzerinden integre edilirse $|\Delta\Phi_B| = RQ$ olur. Yukarıdan $|\Delta\Phi_B| = 2NAB$ olduğundan, böylece $2NAB = RQ$; ya da $B = RQ/2NA$ olur.

Problem 6.2

Yerdeğiştirme akımı. (Giancoli 32-4.)



Plaka alanı A ve plaka aralığı d olan paralel plakalı bir kapasitörün sığası için Giancoli (24-2) (s. 615) denklemini (ve elektrik alanının verilen herhangi bir anda plakalar arasında yaklaşık düzgün olduğu gerçeğini) kullanarak,

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Ed} \to E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

yazabiliriz.

Şimdi yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, $r = 10{,}0\ cm$ yarıçaplı dairesel bir Amper halkasına Giancoli Denklem (32-1) (s.789) formundaki Amper Yasasını uygulayalım (not: şekil ölçekli değildir). Bu düzenin dönme simetrisine dayanarak, büyüklüğü sadece r'ye bağlı olan halka boyunca manyetik alanın halkaaya teğet olacağını bekleyebiliriz. O zaman Amper Yasasının tarafı,

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint B dl = B \oint dl = 2\pi r B$$

olur. Amper yasasının sağ tarafı için halkamızın sınırladığı ve kapasitörün plakaları arasından geçen düzlem yüzeyi düşünebiliriz. Bu yüzeyden geçen akım **yoktur**, bu yüzden $I_{iç} = 0$'dır. Ancak, yüzeyden geçen ve $\Phi_E = EA$ ile verilen bir elektrik akısı vardır (A *kapasitör* plakalarının yüzey alanıdır: kapasitörün dışında elektrik alan yoktur). Yukarıdaki sonuçlarımızdan,

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{d}{dt}(EA) = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\varepsilon_0 A}\boldsymbol{A}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dQ}{dt}$$

hesaplayabiliriz. Bu durumda Amper Yasası bize,

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{iç} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \to 2\pi r B = \mu_0 \frac{dQ}{dt} \to B = \frac{\mu_0\, dQ/dt}{2\pi r}$$

verir. Şuna dikkat edelim ki, bu sonuç kapasitörün boyutlarına bağlı *değildir*. Yük için sayısal değerler yerlerine konursa;

$$B = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(0{,}0350)}{2\pi(0{,}100)} = 70\ nT$$

elde edilir. Kapasitör tamamen yüklendiğinde, $dQ/dT = 0$, ve böylece $B = 0$ olur.

Problem 6.3

Bir Toroidin Öz-indüktansı.(Giancoli 30-48.)

(a) Önce düzgün bir şekilde toroidin içindeki manyetik alanın davranışını ele alalım. Toroidin içinde herhangi bir noktada, büyük çemberin merkezinden alınan uzaklık $r = r_0 + \delta$ ile ifade edilebilir, burada $\delta < d$'dir. Toroidin içindeki manyetik alan için Giancoli Örnek 28-8 (s.718) sonucunu kullanarak,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi(r_0+\delta)} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r_0(1+\delta/r_0)} \approx \frac{\mu_0 NI}{2\pi r_0} \qquad r_0 \gg d > \delta \text{ olduğu zaman}$$

elde ederiz.

Bu yaklaşım içinde, toroidin bir sarımından geçen manyetik akı (ve aynı toroidteki akımdan dolayı)

$$\Phi_B \approx \pi(d/2)^2 B \approx \frac{\mu_0 NI d^2}{8r_0}$$

dır. Giancoli Denk. (30-4) (s.758) den, toroidin öz-indüktansı o zaman

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \approx \frac{\mu_0 N^2 d^2}{8r_0}$$

olur. Bu, gerçekten de, uzunluğu $l = 2\pi r_0$ ve kesit alanı $A = \pi(d/2)^2$ olan bir selonoidin sonucuyla uyuşur (bakınız Giancoli Örnek 30-3, s. 759); olması gerektiği gibi:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} = \frac{\mu_0 N^2 \pi(d/2)^2}{2\pi r_0} = \frac{\mu_0 N^2 d^2}{8r_0}.$$

olur. Toroidimiz tam olarak çember şeklinde bükülmüş selonoiddir, açmak için d/r_0 mertebeden terimleri ihmal edebiliriz, bükmenin bir etkisi yoktur.

(b) Verilen değerleri yerine koyarsak,

$$L \approx \frac{(4\pi\times 10^{-7})(550)^2(0{,}020)^2}{8(0{,}25)} = 76\ \mu H.$$

elde edilir.

Problem 6.4

Manyetik Alanın Enerjisi ve Öz-indüktans.

(a) Problem 5.2'nin sonuçlarından, tel ekseninden r uzaklığının fonksiyonu olarak tel içindeki manyetik alanın büyüklüğü için aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

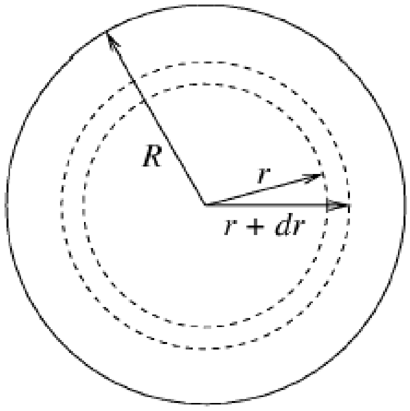
$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

Giancoli Denk. (30-7) (s.761)'yi kullanarak, manyetik alan enerji yoğunluğunu (yani, metreküp başına Joule),

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\right)^2 = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}$$

olarak ifade edebiliriz.

Şimdi tel içerisinde l uzunluklu, r yarıçaplı ve dr kalınlıklı bir silindirik kabuk düşünün. Böyle bir kabuğun hacmi,



$$d(\text{hacim}) = 2\pi r\, l dr$$

olur ve $dr \to 0$ limitinde kabuk boyunca manyetik alan enerji yoğunluğu sabittir. Böylece telin bir l uzunluğu içindeki toplam manyetik alan enerjisi,

$$U_{in} = \int u d(\text{hacim}) = \int_0^R \left(\frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}\right)(2\pi r l dr) = \left(\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi\, R^4}\right)\int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$$

integrasyonu ile bulunabilir.

(b) Depolanan manyetik alan enerjisi ve öz-indüktans arasındaki ilişkiden (Giancoli Denklem (30-6), s. 761), telin içindeki öz-indüktansı tanımlayabiliriz:

$$U = \frac{1}{2} L_{iç} I^2 = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} \to L_{iç} = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

Böylece tel, içindeki manyetik alana eşlik eden birim uzunluk başına $\mu_0/8\pi$ öz-indüktansına sahip olur.

Problem 6.5

RL devreleri.

Giancoli Denk. (30-9) (s.762) bize t =0 anında bir bataryanın V_0 voltajına bağlanan bir LR devresinde zamana bağlı akım ifadesini verir:

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \qquad \tau = L/R$$

Bunu iyi kullanacağız! Devremiz için zaman sabiti $\tau = 0{,}09/0{,}05 = 1{,}8\ s$'dir.

(a) Akımın son değeri basitçe V_0/R'dir. $\alpha = 0{,}05$ alalım; akımın, son değerinin $\%95$'ine ulaşması koşulu o zaman

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = (1-\alpha)\frac{V_0}{R}$$

$$\Rightarrow e^{-t/\tau} = \alpha$$

$$\Rightarrow t = -\tau \ln\alpha = 5{,}4\ s.$$

ile ifade edilebilir.

(b) Giancoli Denklem (30-6)(s.761)'yı kullanarak, manyetik alanda depolanan enerjiyi,

$$U = \frac{1}{2}L\,I^2 = \frac{1}{2}L\,(1-\alpha)^2\frac{{V_0}^2}{R^2} = \frac{1}{2}(0{,}09)(0{,}95)^2\frac{(12)^2}{(0{,}05)^2} \simeq 2300\,J.$$

buluruz.

(c) Herhangi bir anda bataryadan aktarılan güç,

$$P(t) = V_0 I(t) = \frac{{V_0}^2}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

dir. (a) şıkkında bulunan t zamanı için bataryadan iletilen W toplam enerjisini bulmak için integral alırız:

$$W = \int_0^t P(t')dt' = \frac{{V_0}^2}{R}\int_0^t \left(1 - e^{-t'/\tau}\right)dt' = \frac{{V_0}^2}{R}\left[t' + \tau e^{-t'/\tau}\right]_0^t$$

$$= \frac{{V_0}^2}{R}\left[t - (1-\alpha)\tau\right] = \frac{(12)^2}{(0{,}05)}\left[5{,}4 - (0{,}95)(1{,}8)\right] = 10600\,J.$$

Böylece, dirençte boşa harcanan enerji $\approx 10600 - 2300 = 8300J$'dür.

Problem 6.6

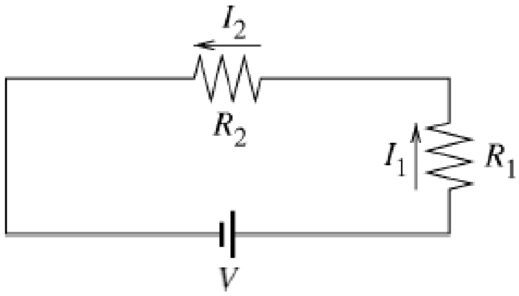
RL devresi. (Giancoli 30-30.)

Devrenin üst kolundaki indüktör I_3'deki ani değişimlere direnecektir. Devrenin geri kalanındaki ihmal edilebilir indüktans şu anlama gelir: aslında I_1 ve I_2 anahtarın açılması ve kapanmasına anında cevap verebilir. (Not: bu çözümlerde batarya voltajını belirtmek için ε yerine V kullanılmaktadır.)

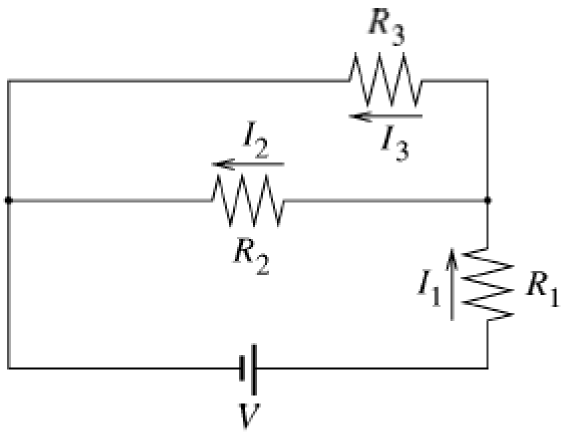
(a) Anahtar kapatılmadan önce bütün akımlar sıfırdır. Anahtar aniden kapatıldıktan *hemen* sonra hala $I_3 = 0$'dır. Bu anda, devreyi sağda gösterildiği gibi, etkin bir devre olarak göz önüne alabiliriz. Bu durum kolaylıkla

$$I_1 = I_2 = \frac{V}{R_1 + R_2}.$$

çözümünü verir.



(b) Anahtar uzun bir süre kapatıldıktan sonra, bütün akımlar değişmeyen, kararlı-durum değerlerine ulaşmış olacaktır. Akımlar zamanla değişmediği zaman, indüktörlerin bir etkisi olmayacaktır, bu nedenle devreyi solda gösterildiği gibi ele alabiliriz. Kirchhoff Kurallarını uygulayarak



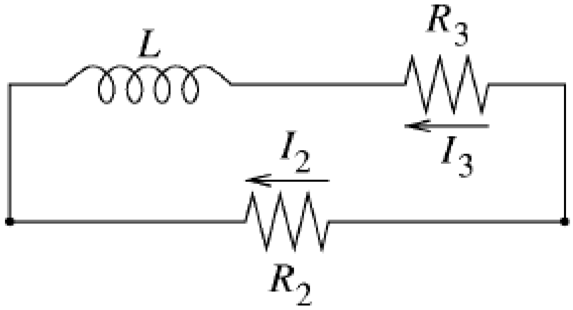
$$I_1 = I_2 + I_3, \quad I_1R_1 + I_2R_2 = I_1R_1 + I_3R_3 = V$$

elde ederiz. O zaman küçük bir cebir,

$$I_1 = V\left(R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}\right)^{-1}, \quad I_2 = V\left(R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}\right)^{-1}, \quad I_3 = V\left(R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_2}\right)^{-1}.$$

verir.

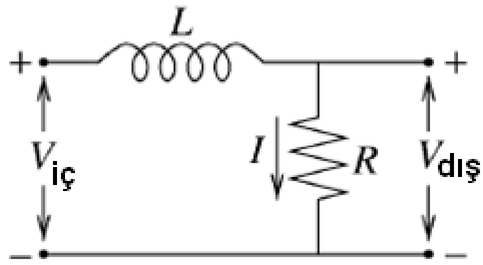
(c) Anahtar tekrar açıldıktan hemen sonra, batarya ve R_1'i içeren kol hizmet dışı kalır, böylece $I_1 = 0$ olur. Geri kalan devre sağda gösterildiği gibidir. I_3 zamanla indüktör nedeniyle sürekli olmalıdır, böylece o (b) şıkkında bulunan değerle aynı değere sahip olur. Kirchhoff'un çevrim kuralından (a.k.a. yük korunumu) $I_2 = -I_3$ yazılır.



(c) Anahtar tekrar açıldıktan uzun bir süre sonra, (c) şıkkındaki akımlar $I_1 = I_2 = I_3 = 0$ olacaktır.

Problem 6.7

Tümleşik devre. (Giancoli 30-57.)



Sağdaki şekilde görüldüğü gibi, bir I akımı tanımlayalım. Ayrıca $V_{iç}$ ve $V_{dış}$ için şekilde gösterilen işaretleri seçelim. $V_{iç}$'e zamana bağlı bir tür batarya voltajı olarak ve $V_{dış}$'a R ile karşılaştırıldığında çok büyük bir iç dirençli bir voltmetrenin çıkışı olarak bakılabilir. Aslında, $V_{dış}$ direçteki akımın bir ölçüsüdür: $V_{dış} = RI$.

$LRV_{iç}$ halkası için Faraday Yasasının ifadesinden,

$$V_{iç} - L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

elde ederiz.

Giancoli'nin ipucunu takip ederek, $e^{Rt/L}$ ile çarparız ve "çarpım kuralını geri alabileceğimizi" fark edebiliriz:

$$e^{Rt/L}V_{iç} - e^{Rt/L}\,L\frac{dI}{dt} - e^{Rt/L}RI = 0$$

$$\Rightarrow e^{Rt/L}V_{in} - \frac{d}{dt}\left(e^{Rt/L}LI\right) = 0.$$

Bu eşitliğin 0'dan t'ye integrali alınırsa,

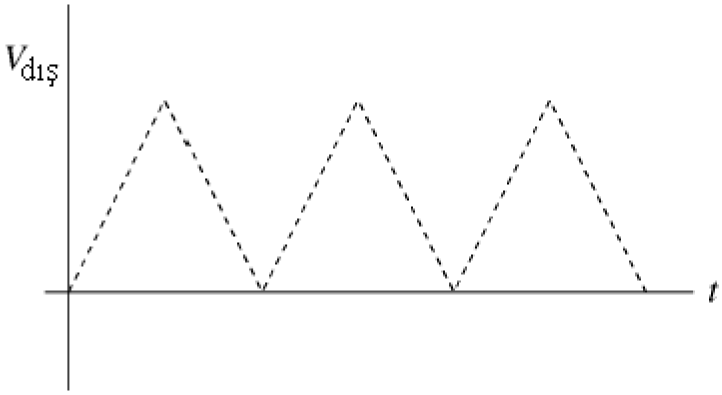
$$\int_0^t e^{Rt'/L}V_{iç}(t')dt' = e^{Rt/L}LI(t) - LI_0$$

elde ederiz. Şimdi, eğer zaman sabiti L/R, $V_{iç}$'in değiştiği zamanla karşılaştırıldığında, çok büyükse, $e^{Rt/L} \approx e^0 = 1$ alabiliriz. Bu bize

$$\int_0^t V_{iç}(t')dt' = LI(t) - LI_0$$

$$\Rightarrow V_{dış}(t) = V_{dış}(t=0) + \frac{R}{L}\int_0^t V_{iç}(t')\,dt'$$

verir. Bu, devrenin tümleşik olduğu anlamına gelir. L/R'nin varyasyon zaman ölçeğinden büyük olması varsayımının, tipik $V_{dış}$ büyüklüğünün $V_{iç}$'den daha küçük olacağı anlamına geldiğine dikkat edilmelidir. Verilen kare-dalga giriş sinyali için çıkış voltajının grafiği aşağıda görülmektedir ($V_{dış}(t=0)=0$ alarak).



SON