

Adam S. Bolton
bolton@mit.edu

22 Mart 2002

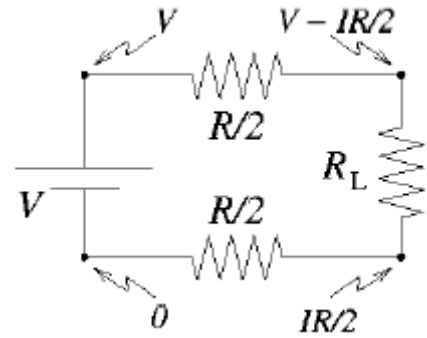
MIT 8.02, Bahar 2002

Ödev # 5 Çözümler

Problem 5.1

Yüksek Gerilim Güç İletimi.

Güç aktarım sisteminin analizinde sağ taraftaki basit devre şeması kullanılabilir. Güç istasyonu V voltajlı “batarya” gibi davranır. Üç dirençten ikisi $R/2$ direnci (güç hattı) ve bir tanesi R_L direnci (güç tüketicilerinin “yük direnci”) olmak üzere, bataryaya seri bağlanılmışlardır. Voltajlar şema üstünde çeşitli noktalarla gösterilmiştir. Güç tüketicilerine dağılan voltajın $V - \Delta V = V - IR$ olduğunu buluruz; böylece, $\Delta V = IR$ güç kabloları boyunca toplam voltaj düşmesi ve R kablolardaki toplam dirençtir.



(Not: Belirli bir noktada $V=0$ aldık; fakat seçim tamamen keyfidir. Devre etrafındaki noktalar arasındaki voltaj *farkları* bu seçimden etkilenmezler.)

- (a) $+40^\circ\text{C}$ ve -40°C 'de alüminyumun öz direnci Giancoli Denklem (25-5) (s. 641) kullanılarak bulunabilir:

$$\rho_T = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

Giancoli Tablo 25-1 (s.640) de alüminyum için $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 'de $\rho_0 = 2.65 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ ve $\alpha = 0.00429^\circ\text{C}^{-1}$ verilmektedir. Bu veriler bize;

$$\rho_{+40} = (2.65 \times 10^{-8}) [1 + (0.00429)(40 - 20)] = 2.88 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$$

$$\rho_{-40} = (2.65 \times 10^{-8}) [1 + (0.00429)(-40 - 20)] = 1.97 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$$

verir. Bu durumda dirençler Giancoli Denklem (25-3) (s.640) kullanılarak hesaplanabilir. İlk önce birimleri çevirmeliyiz: $2 \times 300 \text{ milles} = 9.66 \times 10^5 m$ ve $5 \text{ cm}^2 = 5 \times 10^{-4} m^2$.

$$R_{+40} = (2,88 \times 10^{-8})(9,66 \times 10^5) / 5 \times 10^{-4} = 56 \Omega$$

$$R_{-40} = (1,97 \times 10^{-8})(9,66 \times 10^5) / 5 \times 10^{-4} = 38 \Omega$$

bulunur.

(b) Ohm yasasından, kablolar arasındaki voltaj düşmesi, basitçe $\Delta V = IR$ 'dir. $P = VI$ güç istasyonundan iletilen toplam güçtür; böylece $I = P/V$ ve $\Delta V = RP/V$ yazabiliriz.

(c) Etkilene $\Delta V = RP/V = (0,02)V$ yazarak,

$$V = \sqrt{RP/(0,02)}$$

elde ederiz.

İki direncimizin R değerini ve $P = 2 \times 10^8 W$ 'yi yerine yazarsak,

$$V_{min,+40} = 7,5 \times 10^5 V, \quad V_{min,-40} = 6,2 \times 10^5 V$$

buluruz.

(d) Kablolarda boşa harcanan güç her iki sıcaklık için

$$\Delta P = \Delta VI = (0,02)VI = (0,02)P = 4 MW$$

olacaktır.

(e) Giancoli Denklem (28-2) (s.711), akım taşıyan iki paralel tel arasında birim uzunluk başına kuvveti verir. Her iki tel aynı I akımı taşır, böylece ($d = 8m$ ve $l = 25m$ ile)

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d}$$

ve $I^2 = (0,02)P/R$ kullanarak ve bilinen değerleri yerine yazarak

$$F_{+40} = (2 \times 10^{-7})(0,02) \frac{(2 \times 10^8)(25)}{(56)(8)} = 0,045 N$$

$$F_{-40} = (2 \times 10^{-7})(0,02) \frac{(2 \times 10^8)(25)}{(38)(8)} = 0,066 N$$

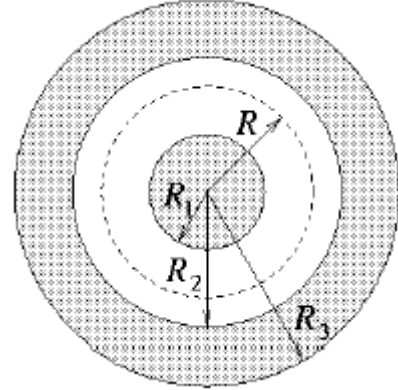
elde edilir.

İki teldeki akımlar zıt yönlerde olduğundan, kablolar arasındaki bu kuvvet iticidir.

Problem 5.2

Amper Yasasının uygulaması. (Giancoli 28-27.)

Kablonun boyca kesitini gösteren sağdaki şekli düşünün. I_0 akımın yönünü merkezde “sayfa düzleminde dışarı” ve dış kabukta “sayfa düzleminin içine” doğru olduğunu varsayın. Sistemin silindirik simetrisi bize, manyetik alan çizgilerinin kablo ekseninde merkezlenmiş çemberler olacağını ve manyetik alan şiddetinin sadece eksenden R uzaklığına bağlı olacağını söyler. Böylece şekilde görüldüğü gibi, kablo ekseninde merkezlenmiş R yarıçaplı bir “amper halkası” kurabiliriz, bilindiği gibi \mathbf{B} her zaman halkaya teğettir ve halka etrafında sabit bir büyüklüğe sahip olacaktır.



Amper yasasını bizim halkamıza saatin-terci yönünde uygularsak,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B dl = B \oint dl = B(2\pi R) = \mu_0 I_{iç}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_{iç}}{2\pi R}$$

buluruz. Burada B , \mathbf{B} 'nin saatin-terci yönündeki azimuthal bileşenidir (sadece \mathbf{B} 'nin sıfırdan farklı bileşeni). Şimdi işimiz, ilgilendiğimiz değişik bölgeler için $I_{iç}$ 'i bulmaktır.

(a) İçteki I_0 akımı πR_1^2 kesit alanı boyunca düzgün dağılmıştır. $R < R_1$ yarıçaplı bir amper halkası πR^2 alanı kuşatır ve böylece o, bu iki alanın oranıyla verilen toplam akımın bir kısmını saracaktır: $I_{iç} = I_0(R^2/R_1^2)$. Bunu B ifademizde yerine yazarsak,

$$B = \frac{\mu_0 I_0 R}{2\pi R_1^2} \quad (R < R_1).$$

elde ederiz.

(Amper halkası içindeki akımı *pozitif* olarak göz önüne aldığımızı dikkat edilmelidir. Çünkü o, saat ibrelerinin terci yönünde bir seçimle verilen Amper halkası ile sınırlanmış yüzeyin normali ile aynı yönde akar.)

(b) $R_1 < R < R_2$ bölgesinde R yarıçaplı Amper döngüsü, içteki I_0 akımının tamamını ve tabakadaki akımın hiçbir kısmını sarmaz, bu yüzden, basitçe şunu elde ederiz:

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} \quad (R_1 < R < R_2)$$

(c) Dıştaki tabaka $\pi(R_3^2 - R_2^2)$ kesit alanına düzgün dağılmış bir $-I_0$ akımı taşır (negatiftir, çünkü saat ibresi tersi yönündeki Amper döngümüzle sınırlı yüzeyin normaline zıt yönelmiştir). $R_2 < R < R_3$ bölgesindeki bir halka kabuk kesitinin $\pi(R^2 - R_2^2)$ değerinde bir kesit alanını çevreleyecek ve böylece $-I_0(R^2 - R_2^2)/(R_3^2 - R_2^2)$ ile verilen tabaka akımının bir kısmını içerecektir. Ayrıca halka, merkezin I_0 akımının tamamını kuşatır; böylece bu bölgede $I_{i\phi} = I_0[1 - (R^2 - R_2^2)/(R_3^2 - R_2^2)]$ olur. Bunu, B' 'yi elde etmek için yerine yazarsak:

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} \left[1 - \frac{(R^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} \right] \quad R_2 < R < R_3$$

elde ederiz.

(d) Son olarak, $R > R_3$ bölgesinde döngümüz merkezin I_0 akımının tamamını ve tabakanın $-I_0$ akımının tümünü çevreler. $I_{i\phi} = 0$ yazarak,

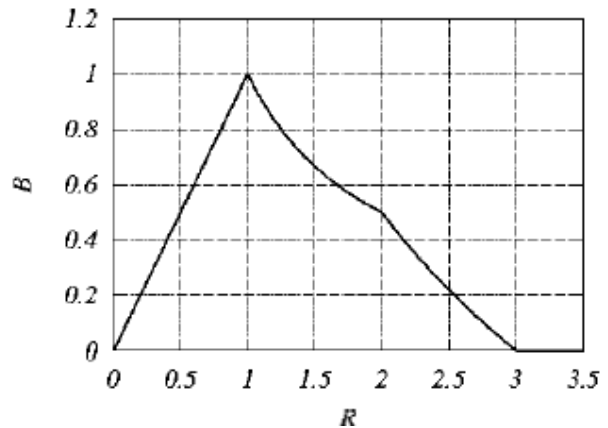
$$B = 0 \quad (R > R_3)$$

elde edilir.

(Not: X halkası Y akımını çevreler dediğimizde, tam olarak " Y akımının X halkasıyla sınırlandırılmış açık yüzeyden geçtiğini" söyleriz).

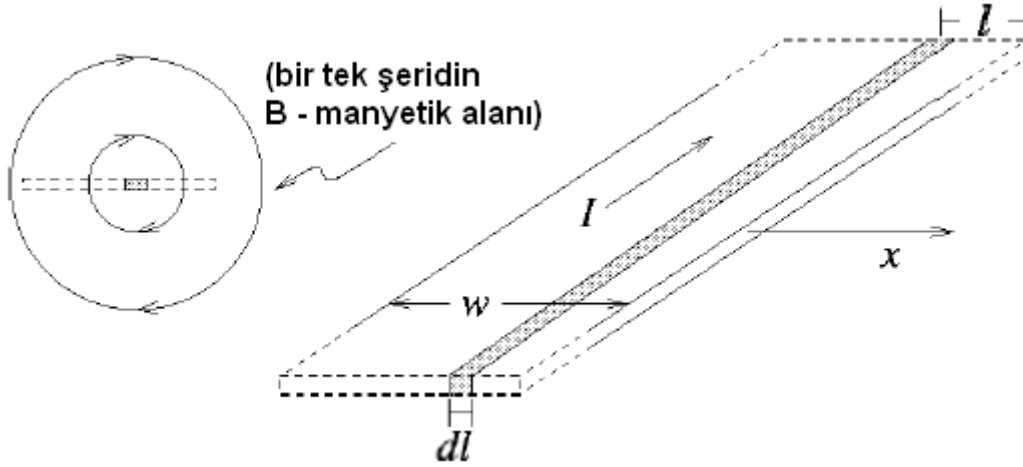
Ödev- dışı:

B 'nin R 'ye bağımlılığı hakkında daha iyi bir fikir edinmek için $R_2 = 2R_1$ ve $R_3 = 3R_1$ alabiliriz ve sağda görüldüğü gibi $B(R)$ 'yi çizebiliriz. R , R_1 , B ve $\mu_0 I_0 / 2\pi R_1$ birimlerinde çizilmiştir. $B(R)$ 'nin her yerde sürekli olduğuna dikkat edilmelidir. B 'deki süreksizlikler, tıpkı E 'deki süreksizliklerin sadece yük tabakasından gelmesi gibi, sadece akım tabakasından gelir.



Problem 5.3

Akım taşıyan bir şeridin manyetik alanı.



Akım taşıyan bir şeridin manyetik alanını bulmak için, şeridi, kavramsal (ve matematiksel) olarak, tel gibi sonsuz küçük birçok parçaya böleriz. Lineer süperpozisyon ilkesi bize şeridin manyetik alanının, her bir parçanın vektörel toplamı olacağını söyler.

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi şeridin sağ kenarından l uzaklıkta bulunan dl genişliğinde küçük bir parçayı göz önüne alın. Küçük parça, $I dl/w$ akımını taşır ve alanı bulmak istediğimiz şerit düzleminde $l+x$ kadar mesafede bir noktada yerleşmiştir. Bu şerit parçasının ilgilenilen noktadaki alana diferansiyel katkısı, düzgün, uzun bir telin alanı olup,

$$dB = \frac{\mu_0 I dl/w}{2\pi(x+l)}$$

ile verilir ve sağ-el kuralına göre aşağı yönelmiştir.

Toplam alanı bulmak için, basitçe $l=0$ dan $l=w$ 'ya şerit üzerinden integral alırız ($u = x+l$, $du = dl$ yazarak):

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \int_0^w \frac{dl}{(x+l)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \int_x^{x+w} \frac{du}{u} = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \ln\left(1 + \frac{w}{x}\right).$$

(Alan yine aşağı yönde, şerit düzlemi ve akım yönünün her ikisine de diktir.)

$w \rightarrow 0$ limit durumunu incelemek için, doğal logaritmanın birinci dereceden Taylor açılımını kullanmalıyız: $\delta \ll 1$ için $\ln(1+\delta) \approx \delta$ 'dir (Giancoli Ek A-3 ten kontrol ediniz). $w \rightarrow 0$ yaklaştıkça $w/x \ll 1$ olacağından,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \left(\frac{w}{x} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

yazılabilir.

Bu tam olarak, I akımı taşıyan bir telden x kadar uzakta beklediğimiz alandır.

Sabit x 'de $w \rightarrow 0$ limit durumunu aldık ("çok ince şerit sınırı"), fakat benzer biçimde bunu sabit w 'da $x \rightarrow \infty$ limit durumu olarak alabilirdik ("sınırdan uzakta"): yeterince uzaklıkta herhangi bir şerit, bir tel gibi görülecektir. Önemli olan şey $w/x \ll 1$ olmasıdır.

Problem 5.4

Halka üzerindeki kuvvet - Giancoli 29-14.

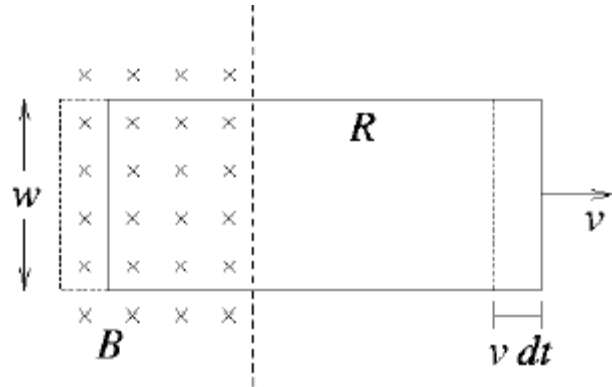
Kolaylık için, aşağıdaki değişkenleri belirterek çalışacağız:

$$w = 0,350 \text{ m}$$

$$B = 0,450 \text{ T}$$

$$R = 0,230 \Omega$$

$$v = 3,40 \text{ m/s}$$



Küçük bir dt zaman aralığında, dikdörtgensel halka $v dt$ mesafesi kadar hareket eder ve böylece halka içindeki B alanı $dA = w v dt$ miktarı kadar azalır. Alanın büyüklüğü sabit kalır, böylece halkanın sınırladığı düzlem yüzeyden geçen manyetik akı $d\Phi_B = B dA = B w v dt$ miktarı kadar azalır. Faraday yasasından (Giancoli Denklemi (29-2a), s. 736), indüklenmiş emk'nın büyüklüğü,

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi_B}{dt} = B w v.$$

olacaktır. Bu, halkada saat ibresi yönünde,

$$I = |\mathcal{E}|/R = B w v/R$$

büyükliğünde bir akım indükleyecektir (akı değişimine zıt olması için saat ibresi yönünde: Bu Lenz yasasıdır).

Bu akım B alanı bölgesinde halkanın sol kenarından yukarıya doğru aktığında, bu kenar üzerine Lorentz kuvvet yasası ile verilen sola yönelmiş bir kuvvet etkiyecektir (Giancoli Denklem (27-3) s. 691 biçiminde):

$$F = IwB = B^2 w^2 v / R = (0,450)^2 (0,350)^2 (3,40) / 0,230 = 0,367 \text{ N}$$

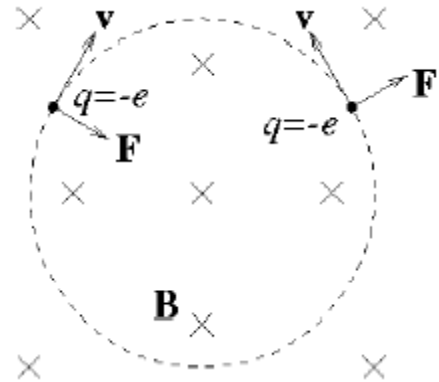
Böylece, halkanın sabit hızla hareketini sağlamak için, bir kimse veya bir şey halkayı $0,367 \text{ N}$ luk kuvvetle sağa doğru çekmelidir.

Problem 5.5

Betatron. (Giancoli 29-49.)

(a) Değişen manyetik alan, elektronun yörüngesi ile sınırlandırılmış açık bir yüzeyden geçen manyetik akıyı değiştirir. Faraday yasasından bu, vakum tüpü etrafında bir emk indükleyecektir: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ sıfırdan farklı olacak ve E elektronların hızlandırılmasını sağlayacaktır.

(b) Sağdaki şekil, yukarıdan bakıldığında görüldüğü gibi, Giancoli Şekil 29-37 (s. 754) ile uyudur. Vakum tüpünde hareket eden elektronlar $\mathbf{F} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ ile verilen bir manyetik kuvvetiyle dairesel yörüngelerinde tutulurlar. Eğer elektronlar saat ibrelerinin tersi yönünde hareket ederse, bu kuvvet *dışa doğru* yönelecek ve elektronu yörüngede tutamayacaktır (şekle bakın ve hatırlayın: elektronun yükü *negatiftir*). Bununla beraber, saat ibresi yönünde hareket eden elektronlar *içe doğru* bir manyetik kuvvet etkisinde kalacaktır. Bu yüzden elektronlar saat ibreleri yönünde hareket etmelidir.



(c) Saat ibreleri yönünde hareket eden elektronlarımızı yüksek hızlara ivmelendirmek için saat ibrelerinin *tersi* yönünde bir emk'ya ihtiyacımız var, çünkü negatif yüklü parçacıklar \mathbf{E} -alanına zıt yönde ivmelenirler. Faraday-Lenz yukarıdaki şeklimizde kâğıt düzlemi içine doğru olan \mathbf{B} -alanının büyüklüğündeki *artmanın*, böyle bir artıştan dolayı akıdaki değişimi dengeleme eğiliminde olan saat ibrelerinin tersi yönünde bir elektrik akımından dolayı manyetik alan için, saat ibrelerinin tersi yönünde bir emk indükleyeceğini söyler.

(d) Eğer elektromıknatis AC ise, manyetik alan zamanla sinüzoidal olarak değişecektir. Diyelim ki o, sıfırdan başlayarak, sayfa düzleminden içeri doğru, artmaya başlasın. İlk çeyrek devir boyunca, B alanı elektronları saat ibreleri yönündeki yörüngesinde tutmak için sağa doğru olacak ve yüksek hızlara elektronları ivmelendirebilecek saat ibreleri tersi yönünde bir emk indüklemek için bu şekilde değişecektir. Fakat ikinci çeyrek devire başlarken B -alanının büyüklüğü azalacaktır. Alanın yönü hala elektronların saat ibreleri yönünde tutmaya çalışacaktır, fakat indüklenmiş emk şimdi saat ibreleri yönünde olacak ve bu elektronları yavaşlatma eğiliminde olacaktır. Böylece yararlı hızlandırma sadece bir çeyreklik devir süresince mümkündür.

Problem 5.6

Sezgilerin Yıkılması - (15 Marttaki ders notları "Test 1".)

Biz bu durumu, tamamen ders notlarındaki örnek devre için yaptığımız gibi analiz edebiliriz. Burada önemli bir değişiklik var: Eğer sol kapalı halkaya bir açık yüzey iliştirirsek, şimdi bu yüzey boyunca bir manyetik akı değişimi olur. Böylece notlardaki (3)-(5) eşitlikleri:

$$\text{Sol halka: } I_1 R_i + I_1 R_1 - I R_1 = \varepsilon$$

$$\text{Orta halka: } I R_1 + I R_2 - I_1 R_1 - I_2 R_2 = \varepsilon$$

$$\text{Sağ halka: } I_2 R_2 - I R_2 + I_2 R_i = 0$$

olur.

Kirchhoff'un ikinci denklemi yerine Faraday yasasını kullanmak, sadece sol halkanın denklemini değiştirdi. Notlarda tanımlandığı gibi, aynı yaklaşımlar yapılırsa, bu durumda denklemler;

$$I_1 R_i - I R_1 \approx \varepsilon \quad (1)$$

$$I(R_1 + R_2) \approx \varepsilon \quad (2)$$

$$I_2 R_i - I R_2 \approx 0 \quad (3)$$

olur.

Eğer iki voltmetreyi notlarda tanımlandığı gibi bağlarsak, (A tarafını "+"ya ve D tarafını "-"ye), pozitif I_1 akımı pozitif V_1 ve pozitif I_2 akımı negatif V_2 verecektir. Yukarıdaki (1) ve (3)'den,

$$|V_1| = I_1 R_1 \approx I R_1 + \varepsilon$$

$$|V_2| = I_2 R_2 \approx I R_2$$

yazabiliriz.

(2), bize ε ve I 'nin her zaman aynı işaretli olacağını ve bu yüzden (1) ve (3)'ten I_1 ve I_2 'nin I ile aynı işaretli olacağını söyler. Bağlı voltaj büyüklüğü

$$|V_1/V_2| \approx \frac{I R_1 + \varepsilon}{I R_2} = \frac{R_1}{R_2} + \frac{\varepsilon}{I R_2}$$

dir. (2)'yi kullanarak ε/I yok edersek,

$$|V_1/V_2| \approx 1 + 2R_1/R_2$$

elde ederiz. Eğer ders notlarındaki örnekte verilen sayısal değerleri alırsak, $R_1/R_2 = 1/9$ için, $|V_1/V_2| \approx 11/9$ elde ederiz.

Şimdi tüm devre üzerinde sol halkanın 1 değil 100 sarımdan oluştuğu olasılığını düşünün (bu "test 2" nin senaryosudur): yukarıdaki (1) eşitliğinde $\varepsilon \rightarrow 100\varepsilon$ (burada ε BİR HALKANIN yüzeyinden geçen $-d\Phi_B/dt$ değeri olarak alınmaktadır) alınması

$$|V_1| = I_1 R_1 \approx I R_1 + 100\varepsilon$$

$$|V_2| = I_2 R_2 \approx I R_2$$

sonucunu verir ve o zaman

$$|V_1/V_2| \approx \frac{I R_1 + 100\varepsilon}{I R_2} = \frac{R_1}{R_2} + 100 \frac{\varepsilon}{I R_2} = 100 + 101 \frac{R_1}{R_2}$$

bulunur.

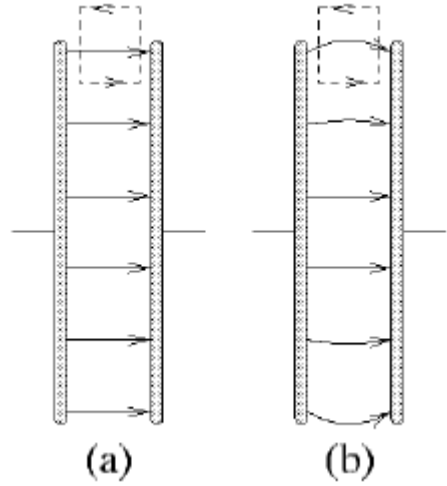
Sayısal değerlerimiz için, $|V_1/V_2| \approx 111$ bulunur. V_2 daha önceki ile aynı değere (9/10 volt) sahip olur; fakat şimdi V_1 , ε EMK'sının yüz katı olan $\frac{9}{10} (111) \approx 100 \text{ volt}$ okur.

Bu transformatörlerin arkasındaki temel fikirdir.

Problem 5.7

Saçak Alanları. (Giancoli 29-69.)

Sağdaki şekilde (a) ile etiketlenmiş birinci olasılığı düşünün: kapasitör plakaları arasındaki elektrik alan düzgün ve tam olarak sağa yönelmiştir ve dışarıda aniden sıfıra düşer. Eğer saat ibrelerinin tersi yönünde kesik çizgi ile gösterilmiş yol boyunca $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ 'yi integre edersek, alt kısımdan gelen pozitif bir katkı elde ederiz, üst kısımdan gelen katkı yoktur (burada $\mathbf{E} = 0$ 'dir) ve diğer kenarlardan gelen katkı yoktur (burada $\mathbf{E} \perp d\mathbf{l}$ 'dir). Böylece $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ elde ederiz. Aynı zamanda, bu, halkanın sınırladığı her hangi bir açık yüzey boyunca $(d\Phi_B)/dt = 0$ olan sözde manyetik alanın olmadığı (zamanla değişen veya diğer) bir yapıdır. Fakat Giancoli Eşitlik (29-8) (s. 747) biçimindeki Faraday kanunu bize $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -d\Phi_B/dt$ olduğunu söyler. Yani bu gerçekleştirilebilir bir statik elektrik alanı değildir.



Şimdi (b) de gösterilen olasılığı düşünün: kapasitör levhalarının kenarlarındaki çok küçük \mathbf{E} -alanı saçaklarını. Önceki gibi kapalı yol boyunca $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ integralinden alt kısımdan önemli derece de bir pozitif katkı elde edeceğiz. Fakat şimdi, sağ taraftaki kısmın integralini alırken, \mathbf{E} 'nin hafif aşağıya doğru bileşeninden bazı negatif katkılar elde edeceğiz. Üst kısım boyunca sol tarafın integrali alındığında, \mathbf{E} tam olarak sıfıra düşmediğinden, başka bir negatif katkıyı elde edeceğiz. Sol taraftaki kenar boyunca integral alındığında, orada hala \mathbf{E} 'nin hafifçe yukarı doğru bileşeninden kaynaklanan başka bir negatif katkı elde ederiz. Biz tekrar manyetik alanların yokluğundan dolayı $(d\Phi_B)/dt = 0$ olacağı sonucuna varırız.

Yinede, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ integralimize pozitif ve negatif katkılardan dolayı artık Faraday kanunuyla uyuşmayan sonuçlarımız sıfır vermek için birbirlerini yok edebilirler (aslında yok etmelidirler!). Bu yüzden (b) yüklü paralel levhalı bir kondansatör için gerçek statik elektrik alanı sergilemektedir

SON